Dies und das zur Mathematik in ZFC, II: Auswahlaxiom

Äquivalenzen zwischen verschiedenen Fassungen des Auswahlaxioms

Unter ZF sind insbesondere die folgenden Aussagen/Prinzipien äquivalent. Dabei ist das Zornsche Lemma häufig die Fassung der Wahl für den Beweis von abstrakten Existenzaussagen, die mit Auswahl zu tun haben (z.B. Basisexistenzsatz der linearen Algebra, Existenz von Ultrafiltern).

1. (AC): Existenz einer *Auswahlmenge* zu jeder Menge von nicht-leeren, disjunkten Mengen (der Einfachheit halber die Fassung in unserer Formulierung von ZFC).
2. die gebräuchlichere Formulierung für den mathematischen Hausgebrauch: Existenz einer *Auswahlfunktion* zu jeder Familie von nicht-leeren Mengen.
3. *Zornsches Lemma*: Jede partielle Ordnung (Halbordnung), in der jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, hat maximale Elemente.
4. *Wohlordnungssatz*: Jede Menge lässt sich wohlordnen (ist Träger einer linearen Ordnung, bezüglich derer jede nicht-leere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt).
5. Variante des Wohlordnungssatzes: Jede Menge ist bijektives Bild einer Ordinalzahl (und demnach einer Kardinalzahl, s.u.).

Als Übungen zu empfehlen:
(1) $\Leftrightarrow$ (2) (wie in Vorlesung skizziert).
(5) $\Rightarrow$ (4): Die Wohlordung für (4) kann per Bijektion von einer Ordinalzahl (Kardinalzahl) importiert werden.
(4) $\Rightarrow$ (1),(2): hat man eine Wohlordung, so kann man nicht-definite Auswahlen durch die Wahl des jeweils bezüglich der Wohlordnung kleinsten Elements ersetzen. Z.B., in der Formulierung (1): ist x eine Menge disjunkter nicht-leerer Mengen, so wähle Wohlordung $\prec$ auf der Vereinigung $\bigcup x$ dieser Mengen und als Auswahlmenge die Menge der $\prec$-Minima all der Mengen in x.

Zornsches Lemma: Als Beispiel für eine Verwendung des Zornschen Lemmas zeigen wir (3) $\Rightarrow$ (4). Zu gegebener Menge x betrachte die Menge P aller Wohlordungen auf Teilmengen $y \subseteq x$ (als 2-stellige Relationen auf $y \subseteq x$ sind solche Wohlordungen Teilmengen von $x \times x$, also Elemente der Potenzmenge von $x \times x$). Für zwei solche Wohlordnungen, $\prec_1$ auf $y_1 \subseteq x$ und $\prec_2$ auf $y_2 \subseteq x$, setze $\prec_1 \lhd \prec_2$ gdw. $y_1 \subseteq y_2$ und y_1 ein Anfangsabschnitt von $(y_2, \prec_2)$ ist. Man macht sich leicht klar, dass $\lhd$ eine partielle Ordnung auf P ist. Jede durch $\lhd$ linear geordnete Teilmenge von P hat als obere Schranke die Vereinigung der beteiligten Wohlordungen. Also existieren nach (3) maximale Elemente in $(P, \lhd)$. Eine Wohlordung $\prec$ auf einer Teilmenge $y \subseteq x$ ist aber genau dann maximal bzgl. $\lhd$, wenn sie nicht verlängerbar ist, d.h., wenn $y = x$ ist. Also liefert jedes maximale Element von $(P, \lhd)$ eine Wohlordnung auf x.

Beweis des Zornschen Lemmas aus (AC). Z.B. (2) $\Rightarrow$ (3). Wir benutzen den Rekursionssatz über On, um die Annahme, dass eine partielle Ordnung mit den gegebenen Eigenschaften keine maximalen Elemente besitzt, zum Widerspruch zu führen. Sei $(P, \lhd)$ eine partielle Ordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Wenn $(P, \lhd)$ keine maximalen Elemente hat, so gibt es zu jedem $p \in P$ ein $p' \in P$

mit $p \lhd p'$; inbesondere hat jede linear geordnete Teilmenge $x \subseteq P$ sogar eine strikte obere Schranke s (d.h., im Sinne von $\lhd$ ist s echt größer als jedes Element von x; wir betrachten jedes beliebige Element von P als obere Schranke von $\emptyset \subseteq P$). Mit dem Auswahlaxiom können wir zu jeder derartigen Teilmenge x also eine strikte obere Schranke $s(x)$ auswählen. Wir definieren nun per Rekursion über die Klasse der Ordinalzahlen eine Operation G auf On anhand der Bedingung

$$G(\alpha) := s\big(\{G(\beta) \colon \beta < \alpha\}\big).$$

Dann ist G eine monotone (ordnungstreue, und daher injektive) Einbettung der *Klasse* On in die *Menge* P. Dies ist unmöglich, da On als echte Klasse nicht injektiv in eine Menge eingebettet werden kann (Satz von Hartogs, in ZF beweisbar).

Für (4) $\Rightarrow$ (5) kann man mittels Rekursionssatz eine ordnungstreue Bijektion zwischen einer gegebenen Wohlordnung und einer Ordinalzahl finden. Sei $\prec$ eine Wohlordung auf der Menge x (gemäß (4)). Definiere eine Operation G auf On anhand der Bedingung:

$$G(\alpha) := \begin{cases} \min_{\prec}\big(x \setminus \{G(\beta) \colon \beta < \alpha\}\big) & \text{falls } x \setminus \{G(\beta) \colon \beta < \alpha\} \neq \emptyset, \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann liefert G einen Isomorphismus zwischen den Ordunungen $(x, \prec)$ und $(\alpha, \in)$, wo α die kleinste Ordinalzahl mit $G(\alpha) = x$ ist. (Dass die Teilklasse derjenigen Ordinalzahlen β, die injektiv in x eingebettet werden können, in On beschränkt und also eine Menge ist, besagt der Satz von Hartogs.)

Aussage (5) beinhaltet die Vergleichbarkeit jeder Menge mit Ordinalzahlen im Sinne von $\approx$ (Existenz von Injektionen in beiden Richtungen; äquivalent: Existenz einer Bijektion). Für gegebene Menge x betrachte die Menge derjenigen Ordinalzahlen, die injektiv in x abgebildet werden können (dass diese Ordinalzahlen eine Menge bilden, ist wieder der Satz von Hartogs). Diese laut (5) nicht-leere Menge von Ordinalzahlen hat ein minimales Element α; es folgt, dass α in keine Ordinalzahl $\beta \in \alpha$ injektiv eingebettet werden kann (warum?), sodass α also eine Kardinalzahl ist. Diese Kardinalzahl α ist die *Kardinalität* von α. Aufgrund von (AC) in der Form von (5) dient also die Skala der Kardinalzahlen (als Teilskala der Ordinalzahlen) als universelle Maßskala für Mächtigkeiten von Mengen.

Die $\aleph$-Skala (auch ω_α statt $\aleph_\alpha$; $\aleph$, aleph: der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets).

Als Kardinalitätsmaßstab benutzt man häufig die durch die Ordinalzahlen indizierte aufsteigende Folge der unendlichen Kardinalzahlen. Wir beginnen mit $\aleph_0 := \omega$, der ersten unendlichen Kardinalzahl. Im Nachfolgerschritt benutzen wir die jeweils nächste Kardinalzahl (das Minimum aller strikt größeren Kardinalzahlen im Sinne der Wohlordnung auf On): für eine Kardinalzahl κ bezeichne κ^+ diese Nächstgrößere. Im Limessschritt wird das Supremum (die Vereinigung) aller vorangehenden Werte genommen. Offiziell definiert man eine Operation $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ (bzw. ω_α) per Rekursion über On gemäß:

$$\begin{aligned} \aleph_0 &:= \omega \\ \aleph_{S(\alpha)} &:= \big(\aleph_\alpha\big)^+ && \text{Nachfolgerschritt} \\ \aleph_\lambda &:= \bigcup\big\{\aleph_\alpha \colon \alpha < \lambda\big\} && \text{Limesschritt für Limesordinalzahl } \lambda. \end{aligned}$$

Bemerkungen. Die $\aleph_\alpha$ bilden eine in On unbeschränkte Teilklasse von On. $\aleph_0$ is die Mächtigkeit der abzählbar unendlichen Mengen; $\aleph_1$ die kleinste überabzählbare Kardinalität, etc. Viele Fragen über die $\aleph$-Hierarchie haben in ZFC keine festgelegte Antwort; so etwa die, ob die Kardinalität von $\mathbb{R}$ (bzw. $P(\omega)$) gerade $\aleph_1$ ist (*Kontinuumshypothese*).