Dies und das zur Mathematik in ZFC

Beispiele nützlicher mengentheoretischer Begriffsbildungen und Modellierungen:

- geordnete Paare: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
- cartesisches Produkt: $u \times v = \{(x, y) \colon x \in u \wedge y \in v\}$.[1]
- (Graphen von) Funktionen: extensionale Auffassung des Funktionsbegriffs!
- die mengentheoretische Darstellung der Menge der natürlichen Zahlen:
  $\boldsymbol{\omega}$: die $\subseteq$-minimale induktive Menge.[2]

Die Menge ω bildet mit $S \colon y \mapsto y \cup \{y\}$ und $0 := \emptyset$ eine Peano-Struktur $(\omega, S, \emptyset)$, das interne Modell der Peano-Struktur der natürlichen Zahlen. ω umfasst insbesondere: $\tilde{0} := \emptyset$, $\tilde{1} := S(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\tilde{2} := S(S(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\ldots$, $\tilde{n} := S^n(\emptyset)$, $\ldots$

In ZFC beweisbar sind z.B.:
- ω wird durch $\in$ wohlgeordnet, S ist die Nachfolgerfunktion bzgl. dieser Ordnung.
- Induktionsprinzip für ω.
- "$(\omega, S, \emptyset) \models$ (P1),(P2),(P3)".
- Satz von Dedekind (in der natürlichen mengentheoretischen Formulierung).

Wichtig: Ein Modell von ZFC "kennt" nur diejenigen Mengen (und Funktionen, usw.), die als Objekte erster Stufe ("Elemente") in diesem Modell *repräsentiert* sind; "von außen" sieht man (auf zunächst verwirrende Weise) mehr Teilmengen, Abbildungen zwischen Teilmengen usw. Ein Beispiel, dass dies notwendigerweise so sein muss, liefert die (intern nicht existente) "Allmenge" aller Mengen, die es intern nicht geben kann (Russellsche Antinomie).

Mächtigkeitsvergleiche
$x \preceq y$, $x \prec y$, $x \approx y$ anhand der Existenz von Injektionen/Surjektionen zwischen x und y definiert. In ZF beweisbar z.B. Transitivität von $\preceq$ und $\prec$ sowie

$$\forall x \forall y \big((x \preceq y \wedge y \preceq x) \rightarrow \text{“ex. } f \colon x \xrightarrow{\text{bij.}} y\text{”} \big),$$

d.h., dass aus der Existenz von zwei Injektionen $f_1 \colon x \to y$ und $f_2 \colon y \to x$ die Existenz einer Bijektion $g \colon x \to y$ folgt (Satz von Cantor–Schröder–Bernstein). Aber erst (AC) garantiert Vergleichbarkeit je zweier Mengen:

$$\forall x \forall y \big(x \prec y \vee x \approx y \vee y \prec x \big).$$

[1] per (SEP) in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(u \cup v))$ zu finden!
[2] per (SEP) in irgendeiner induktiven Menge gemäß (INF) zu finden!

Ordinal- und Kardinalzahlen

Ordinalzahlen sind diejenigen Mengen, die (wie z.B. alle Elemente von ω und ω selbst) unter $\in$ nach unten abgeschlossen und durch $\in$ wohlgeordnet sind. Diese Eigenschaft wird definiert durch eine Formel $\mathrm{On}(\alpha) \in \mathrm{FO}(\in)$, die folgendes zum Ausdruck bringt:[3]

- α transitiv, d.h. es gilt $\forall x(x \in \alpha \rightarrow x \subseteq \alpha)$.
- α durch $\in$ wohlgeordnet, d.h. $\in$ induziert eine lineare Ordnung auf α und jede nicht-leere Teilmenge von α besitzt im Sinne dieser Ordnung ein minimales Element.[4]

Ordinalzahlen bilden die *ordnungstheoretische Verallgemeinerung* der natürlichen Zahlen. Man kann in ZFC z.B. zeigen:

- $\forall\alpha\big(\mathrm{On}(\alpha) \rightarrow \forall x(x \in \alpha \rightarrow \mathrm{On}(x)\big)$
  (d.h.: die Klasse der Ordinalzahlen ist transitiv).
- für je zwei Ordinalzahlen α, β gilt $\alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$
  (sogar: α in Bezug auf $\in$ ein Anfangsabschnitt von β oder umgekehrt).
- Jede nicht-leere Menge oder auch Teilklasse von Ordinalzahlen hat ein kleinstes ($\in$-minimales) Element.
- die Klasse On selbst wird durch $\in$ wohlgeordnet.
- On abgeschlossen unter $S\colon \alpha \mapsto \alpha \cup \{\alpha\}$.
- On abgeschlossen unter der Vereinigung über Teilmengen von On (im Sinne der Ordnung auf On liefert $\bigcup x$ das Maximum oder Supremum einer Menge x von Ordinalzahlen).
- On bildet *keine Menge*, sondern eine *echte Klasse* (Burali-Forti).
- Induktions- und Rekursionsprinzipien über On, z.B.:

Rekursion auf On: Zu jeder definierbaren Mengen-Operation $F\colon x \mapsto F(x)$ gibt es eine eindeutige Operation G auf On sodass für alle Ordinalzahlen α gilt

$$G(\alpha) = F\big(G \restriction \alpha\big).$$[5]

Beispiel: Definition der Niveaus der *kumulativen Hierarchie* $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$:

$$\begin{array}{rcll} V_0 & := & \emptyset & \\ V_{S(\alpha)} & := & P(V_\alpha) & \text{[Nachfolgerschritt]} \\ V_\lambda & := & \bigcup\{V_\beta\colon \beta \in \lambda\} \quad \text{für Limesordinalzahlen}^6\lambda & \text{[Limesschritt]} \end{array}$$

Das Fundiertheitsaxiom (FOUND) besagt gerade, dass die V_α das Mengenuniversum ausschöpfen. *Mengen versus Klassen* (in Bezug auf die kumulative Hierarchie der V_α): Eine definierbare Gesamtheit von Mengen bildet genau dann eine Menge, wenn sie in einem V_α enthalten ist; andernfalls eine echte Klasse!

Kardinalzahlen sind diejenigen Ordinalzahlen, die eine neue Mächtigkeitstufe anbrechen: $\mathrm{On}(\alpha) \wedge \forall\beta(\beta \in \alpha \rightarrow \beta \prec \alpha)$. Die Kardinalzahlen bilden eine echte Klasse, und eine echte Teilklasse der Ordinalzahlen. (AC) garantiert, dass jede Menge zu einer Ordinalzahl und damit zu einer eindeutig bestimmten Kardinalzahl $\approx$-äquivalent ist. Die Kardinalzahlen verallgemeinern den Zahl- und Maß-Aspekt der natürlichen Zahlen.

[3] man benutzt gerne kleine griechische Buchstaben als Variablensymbole/Namen für Ordinalzahlen.

[4] wegen (FOUND) würde es hier sogar ausreichen, "durch $\in$ geordnet" zu verlangen!

[5] $G \restriction \alpha$ steht für $\{(\beta, G(\beta))\colon \beta \in \alpha\}$, die Restriktion von G auf α, d.h., für den Anfangsabschnitt der Operation G bis hin zu α.

[6] das sind Ordinalzahlen ohne direkten Vorgänger, wie z.B. ω.