FO Sequenzenkalkül K — für FO mit $=, \neg, \vee, \exists$

(V) $\dfrac{}{\varphi; \varphi}$ (A) $\dfrac{\Gamma; \varphi}{\Gamma, \Gamma'; \varphi}$

AL Regeln

($\vee$A) $\dfrac{\Gamma, \varphi_1; \varphi \qquad \Gamma, \varphi_2; \varphi}{\Gamma, (\varphi_1 \vee \varphi_2); \varphi}$ ($\vee$S) $\dfrac{\Gamma; \varphi_i}{\Gamma; (\varphi_1 \vee \varphi_2)}$ $(i = 1, 2)$

(FU) $\dfrac{\Gamma, \psi; \varphi \qquad \Gamma, \neg\psi; \varphi}{\Gamma; \varphi}$ (W) $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi; \psi \qquad \Gamma, \neg\varphi; \neg\psi}{\Gamma; \varphi}$

Quantorenregeln

($\exists$A) $\dfrac{\Gamma, \varphi(y/x); \psi}{\Gamma, \exists x\varphi; \psi}$ ($\exists$S) $\dfrac{\Gamma; \varphi(t/x)}{\Gamma; \exists x\varphi}$

$y \notin \mathrm{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)^*$

($*$) Nebenbedingung an die Variable y wesentlich für Korrektheit der Regel!

Gleichheitsregeln

($=$) $\dfrac{}{\Gamma; t = t}$ (Subst) $\dfrac{\Gamma; \varphi(t/x)}{\Gamma, t = t'; \varphi(t'/x)}$

Sequenzen: $\Gamma; \varphi$ mit Antezedens $\Gamma \subseteq$ FO (endliche, auch leer) und Sukzedens $\varphi \in FO$

Allgemeingültigkeit: $\Gamma; \varphi$ allgemeingültig falls $\Gamma \models \varphi$

Korrektheit: nur allgemeingültige Sequenzen sind ableitbar, ergibt sich induktiv aus Korrektheit der Regeln (d.h., daraus, dass die Regeln, angewandt auf allgemeingültige Sequenzen stets wieder allgemeingültige Sequenzen produzieren)

Ableitbarkeit: $\Phi \vdash \varphi$ falls eine Sequenz $\Gamma; \varphi$ in K ableitbar ist mit $\Gamma \subseteq \Phi$

Widerspruchsfreiheit: Φ widerspruchsfrei/konsistent, falls sich kein Widerspruch aus Φ ableiten lässt: für kein φ gilt $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$ (d.h. $\Phi \nvdash \bot$)

Vollständigkeit: (starke Form) wenn $\Phi \models \varphi$, so auch $\Phi \vdash \varphi$;
äquivalent: jede widerspruchsfreie Formelmenge ist erfüllbar

Substitution: $\varphi(t/x)$ (in den Quantoren und Gleichheitsregeln) steht für Einsetzung des Terms t für freie Vorkommen der Variablen x in φ (syntaktisch nicht trivial; so ergibt sich etwa für $\varphi(x) = \exists y\, fy{=}x$ und $t = fy$: $\varphi(y/x) \equiv \exists z\, fz{=}fy$ und nicht etwa $\exists y\, fy{=}fy$)