Axiome für boolesche Algebren $(B, \cdot, +, \; ', 0, 1)$

BA1: + und · assoziativ und kommutativ:

Für alle x, y: $(x+y)+z = x+(y+z)$ und $x+y = y+x$

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $x \cdot y = y \cdot x$

BA2: + und · distributiv (zweifach):

Für alle x, y, z: $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

$x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$

BA3: 0 und 1 als neutrale Elemente:

Für alle x: $x \cdot 1 = x$ und $x + 0 = x$

BA4: Komplement:

$0 \neq 1$ und für alle x: $x \cdot x' = 0$ und $x + x' = 1$

Folgerungen aus den Axiomen:

- Idempotenz: für alle x gilt $x \cdot x = x$ und $x + x = x$.
- Für alle x gilt: $x + 1 = 1$ und $x \cdot 0 = 0$.
- Absorption: für alle x, y gilt $x \cdot (x+y) = x = x + x \cdot y$.
- Durch die beiden Bedingungen $x \cdot x' = 0$ und $x + x' = 1$ ist zu jedem x das Element x' eindeutig bestimmt.
- Involution: für alle x ist $(x')' = x$.
- De Morgan: für alle x, y gilt $(x+y)' = x' \cdot y'$ und $(x \cdot y)' = x' + y'$.

Dualität: Die Komplementabbildung $x \mapsto x'$ ist in jeder BA eine Bijektion, die die Rollen von $\cdot/+$ und $0/1$ vertauscht.

Bemerkung: Die Axiome sind *vollständig* in dem Sinne dass

(a) jede boolesche Termgleichung, die in jeder Potenzmengenalgebra gilt, aus den Axiomen folgt;

(b) jede boolesche Termgleichung die in der 2-elementigen booleschen Algebra $\mathbb{B}$ gilt, aus den Axiomen folgt.

D.h. die in (a) und (b) genannten Gleichungen sind genau dieselben und werden durch **BA1**–**BA4** axiomatisiert.

Die Umkehrungen zu (a) und (b) sind leicht nachzuprüfen (wie?).

Zu den nicht-trivialen Richtungen finden sich Hinweise in den Übungen.