Ordinalzahlen

Mengen, die unter $\in$-Vorgängern abgeschlossen sind
und auf denen $\in$ eine *Wohlordnung* induziert

$\alpha \in \mathbf{On} \; := \; \forall x \big(x \in \alpha \rightarrow x \subseteq \alpha \; \wedge \; \ldots \big) \; \in \mathrm{FO}(\in)$

Bsp.: $0, 1, 2, \ldots, n, S(n) = n \cup \{n\}, \ldots, \omega, S(\omega) = \omega \cup \{\omega\}, \ldots$

On, die Klasse aller Ordinalzahlen:

- echte Klasse, keine Menge (Burali–Forti)
- selbst wohlgeordnet durch $\in$
- unterscheide Nachfolger- und Limes-Ordinalzahlen
- Definitionen und Beweise durch transfinite Induktion

Idee: ordnungstheoretische Verallgemeinerung von $(\omega, <)$,
mit ordinaler Arithmetik, wobei z.B. $S(\alpha) = \alpha + 1$ ist

transfinite Induktion über On:

- zur Definition einer Operation $\alpha \mapsto A(\alpha)$ auf **On**
- zum Nachweis einer Behauptung $A(\alpha)$ für alle $\alpha \in$ **On**

Anfang:	$A(0)$
Nachfolger-Schritt:	von $A(\alpha)$ nach $A(S(\alpha))$
Limes-Schritt:	von $\big(A(\alpha)\big)_{\alpha<\gamma}$ nach $A(\gamma)$

oder uniformer (und allgemeiner):

gewinne $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})$ aus $\big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\beta})\big)_{\boldsymbol{\beta}<\boldsymbol{\alpha}}$

Beispiel: ordinale Addition

Kardinalität & die Struktur des Unendlichen (Cantor)

- Kardinalitätsvergleich

  $x \preccurlyeq y$: Existenz einer Injektion $f \colon x \to y$
  (für $x \neq \emptyset$ äq.: Surjektion $g \colon y \to x$)

  induziert Präordnung mit Äquivalenz $x \approx y$:
  Existenz einer Bijektion (Satz von Cantor–Schröder–Bernstein)

- Kardinalzahlen als spezielle Ordinalzahlen:
  κ Kardinalzahl gdw. $\forall\alpha(\alpha < \kappa \;\rightarrow\; \kappa \not\approx \alpha)$

- Auswahlaxiom (AC)/Wohlordnungssatz:
  jede Menge bijektiv verwandt zu einer Kardinalzahl,
  $\rightsquigarrow$ Kardinalzahlen als universelle Mächtigkeitsskala

Mengen und Klassen

Formeln $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(\in)$ definieren im allgemeinen
Klassen als Gesamtheiten von Mengen

Klassen sind entweder Mengen (Komprehensions-Ax. (SEP))
oder aber echte Klassen wie die “Allklasse” oder **On**

- $\varphi(x)$ definiert eine Menge: $\exists y \forall x \big(x \in y \leftrightarrow \varphi(x)\big)$

- Mengen sind “kleine Klassen”

- (AC): Mengen sind Kardinalitäts-messbare Klassen