was man nicht haben kann . . . . . . oder doch ?

- es gibt Erweiterungen von FO, die Charakterisierungen der Standardstrukturen $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{R}$ (bis auf Isomorphie) erlauben

  insbesondere leistet dies die natürliche Logik zweiter Stufe (SO) mit Quantifizierung über Mengen, Relationen, Funktionen, etc

aber jede Logik, die diese Möglichkeit bietet,

- verletzt Kompaktheit und
- hat keinen vollständigen, korrekten, finitären Beweiskalkül (!)

Ausweg für Grundlegung der Mathematik:

- Festhalten an FO
- Verschieben des Rahmens auf globale Sichtweise in einem Universum der Mengenlehre

  wo Mengen, Relationen und andere Konstrukte höherer Ordnung allesamt als Objekte erster Stufe verfügbar sind

zur Mathematik im Rahmen der Mengenlehre

anstatt z.B. die Standard-Peano-Struktur (oder z.B. die Standard-Modelle der Arithmetik) als isolierte Strukturen zu axiomatisieren:

- Axiomatisierung des Mengenuniversums als Hintergrundstruktur und Rahmen für die gesamte Mathematik

$\rightarrow$ Zermelo–Fraenkel Axiome mit Auswahlaxiom (ZFC) in FO

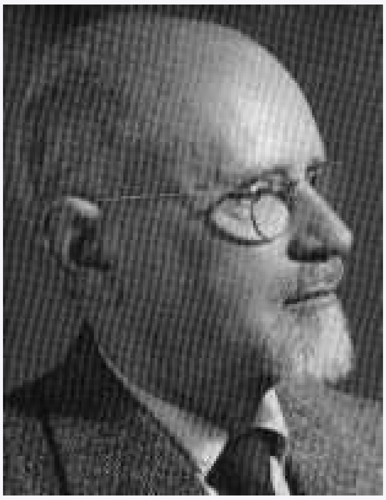
- interne Beschreibung/Definition entsprechender Strukturen mittels FO im Mengenuniversum

- interner Nachweis z.B. des Satzes von Dedekind in ZFC: $\mathrm{ZFC} \models$ "Satz von Dedekind"

Axiomatische Mengenlehre (ZFC)

Georg Cantor
(1845–1918)

Ernst Zermelo
(1871–1953)



Abraham Fraenkel
(1891–1965)

ein Axiomensystem der Mengenlehre (ZFC)

zur Axiomatisierung der $\in$-Struktur des Mengenuniversums

strukturelle Leitgedanken:

- **Extensionalität:**
  Mengen sind allein anhand ihrer Elemente unterscheidbar,
  Mengen als ungeordnete "Zusammenfassungen von Objekten"
  (EXT) $\forall x \forall y \big(\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y\big)$

- **Existenz-Forderungen:** Reichhaltigkeitsaussagen,
  genügend Struktur für mathematische Konstruktionen,
  z.B. Teilmengenaussonderung, Vereinigung, Potenzmenge,...

- **Fundiertheit:** ein Minimalismus-Prinzip für einen
  induktiven Aufbau des Mengenuniversums auf $\emptyset$
  (für die Mathematik weitgehend unerheblich)

ZFC: Zermelo–Fraenkel Axiome mit Fundiertheit & AC

Extensionalität
(EXT) $\forall x \forall y \big(\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y\big)$

Mengen sind durch die Gesamtheit ihrer Elemente eindeutig bestimmt; konstitutiv für Konzept "Menge"

Fundiertheit
(FOUND) $\forall x \big(\neg\, x = \emptyset \rightarrow \exists y \big(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset\big)\big)$ $(*)$

verbietet unendlich absteigende Folgen (und Zykel) in der $\in$-Beziehung

$(*)$ Mengenterme wie $\emptyset$, $y \cap x$, $y \cup x$, $\{y\}$ hier als Abkürzung für $\mathrm{FO}(\in)$-Umschreibungen

ZFC: Zermelo–Fraenkel Axiome mit Fundiertheit & AC

Komprehension (Schema, für jede Formel $\varphi(\mathbf{x}, z) \in \mathrm{FO}(\in)$)
(SEP) $\forall \mathbf{x} \forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(\mathbf{x}, z))\big)$

Definition von Teilmengen $\{z \in x \colon \varphi\} \subseteq x$ einer gegebenen Menge (!), zur Vermeidung von Widersprüchen wie der Russellschen Antinomie

Paarmengen
(PAIR) $\forall x \forall y \exists u \forall z \big(z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y)\big)$

Existenz von $\{x, y\}$ zu gegebenen x, y

ZFC: Zermelo–Fraenkel Axiome mit Fundiertheit & AC

(große) Vereinigung

(UNION) $\forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge z \in u)\big)$

Existenz der Vereinigung aller Mengen in x, zu gegebenem x:
$\bigcup x = \bigcup_{u \in x} u$; damit ist $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$

Potenzmenge

(POWER) $\forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow \forall u (u \in z \rightarrow u \in x)\big)$

Existenz der Potenzmenge $P(x) = \{y : y \subseteq x\}$ zu gegebenem x

ZFC: Zermelo–Fraenkel Axiome mit Fundiertheit & AC

Unendlichkeit

(INF) $\exists x \big(\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)$

Existenz einer (unendlichen) "induktiven Menge"; garantiert die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen (als kleinste induktive Menge)

Ersetzung (Schema, für jede Formel $\varphi(\mathbf{x}, u, v) \in \mathrm{FO}(\in)$)

(REP) $\forall \mathbf{x} \forall x \left[\begin{array}{l} \forall u \big(u \in x \rightarrow \exists^{=1} v\, \varphi(\mathbf{x}, u, v)\big) \\ \rightarrow \exists y \big(\forall v (v \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge \varphi(\mathbf{x}, u, v)))\big) \end{array} \right]$

Existenz der Bild*menge* einer gegebenen Menge x unter der durch $\varphi(\mathbf{x}, \cdot, \cdot)$ definierten Mengenoperation

ZFC: Zermelo–Fraenkel Axiome mit Fundiertheit & AC

Auswahlaxiom

$$\text{(AC)} \quad \forall x \left[\begin{pmatrix} \neg\, \emptyset \in x \wedge \\ \forall u \forall v (u \in x \wedge v \in x \wedge \neg u = v) \to u \cap v = \emptyset \end{pmatrix} \longrightarrow \exists y \forall u \big(u \in x \to \exists z\; y \cap u = \{z\} \big) \right]$$

Existenz einer Auswahlmenge zu jeder Menge (Familie) disjunkter nicht-leerer Mengen: genau ein Element aus jeder der beteiligten Mengen

$(*)$ Mengenterme wie $\emptyset$, $y \cap x$, $y \cup x$, $\{y\}$ hier als Abkürzung für $\mathrm{FO}(\in)$-Umschreibungen

mathematische Modellierung in der Mengenlehre

einfache Beispiele:

- kleine Vereinigungen: $x \cup y$
- geordnete Paare (x, y)
- Produkte $x \times y$
- Relationen, Funktionen (extensional: Graphen)
- die natürlichen Zahlen (ω) und ihre Arithmetik
- die rationalen und die reellen Zahlen

methodisch-strukturelle Konzepte:

- Wohlordnungen und Ordinalzahlen
- transfinite Induktion/Rekursion
- Mächtigkeitsvergleiche und Kardinalzahlen