ein FO Sequenzenkalkül

Sequenzenkalkül K für FO mit $=, \neg, \vee, \exists$

Antezedens- und Vorraussetzungsregeln (A), (V)
AL-Regeln ($\vee$A) und ($\vee$S) – strukturell genau wie in AL-Kalkül
erweitert um **Quantorenregeln** und **Gleichheitsregeln**

Quantorenregeln

$$(\exists\mathrm{A})\ \frac{\Gamma, \varphi(y/x); \psi}{\Gamma, \exists x\varphi; \psi} \qquad (\exists\mathrm{S})\ \frac{\Gamma; \varphi(t/x)}{\Gamma; \exists x\varphi}$$

$$y \notin \mathrm{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)^*$$

($*$) Nebenbedingung wesentlich für Korrektheit der Regel!

beide Regeln benutzen *Substitutionen:* $\varphi(y/x)$ und $\varphi(t/x)$

ein FO Sequenzenkalkül

Gleichheitsregeln

$$(=)\ \frac{}{\Gamma; t = t} \qquad (\mathrm{Subst})\ \frac{\Gamma; \varphi(t/x)}{\Gamma, t = t'; \varphi(t'/x)}$$

Substitution: $\varphi(t/x)$ in Quantoren- und Gleichheitsregeln steht für Einsetzung des Terms t für *freie* Vorkommen der Variablen x in φ (syntaktisch nicht ganz trivial):

z.B. $\varphi(x) = \exists y\, fy = x$ und $t = fy$:
$\varphi(y/x) \equiv \exists z\, fz = fy$ (nicht etwa $\exists y\, fy = fy$)

Konsequenzen aus Vollständigkeitssatz

- **algorithmische Erzeugbarkeit**
  aller allgemeingültigen FO-Formeln, sowie der FO-Theorien von geeignet FO-axiomatisierten Strukturklassen

- **Kompaktheit (!)**

FO Kompaktheitssatz

Für $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\sigma)$ und $\varphi \in \mathrm{FO}(\sigma)$:

(1) Φ erfüllbar gdw. jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar

(2) $\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi_0 \models \varphi$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$

Bemerkung:
Kompaktheit zeigt Grenzen für die Ausdrucksstärke von FO !
$\rightarrow$ Beispiele oben und Übungen; u.a. Nichtstandardmodelle

Vollständigkeit und Kompaktheit

Gödelscher Vollständigkeitssatz

Beweismethode: Vervollständigung und Anreicherung einer konsistenten Formelmenge Φ zu $\hat{\Phi}$, $\Phi \subseteq \hat{\Phi} \subseteq \mathrm{FO}(\hat{\sigma})$;
daraus Konstruktion eines Term-Modells für $\hat{\Phi}$
als Quotient der Menge $\mathrm{T}(\hat{\sigma}, V)$ (Hintikka-Konstruktion)
$\longrightarrow$ Introduction to Mathematical Logic

Kompaktheitssatz

(1) syntaktisch, beweistheoretisch: über Vollständigkeitssatz

(2) semantisch, modelltheoretisch: direkte Modellkonstruktion; man kann Modell für Φ algebraisch als Ultraprodukt aus Modellen für sämtliche endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gewinnen

(3) modelltheoretische Reduktion: auf AL Kompaktheit

was FO nicht (direkt) erfassen kann

Kompaktheit $\Rightarrow$ keine unendliche Struktur ist in FO bis auf Isomorphie charakterisierbar

Beispiel: Standardstrukturen der Arithmetik
$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ und $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ als σ_{ar}-Strukturen

- es gibt Nichtstandardmodelle $\mathcal{N}^* \equiv_{\mathrm{FO}} \mathcal{N}$ und $\mathcal{R}^* \equiv_{\mathrm{FO}} \mathcal{R}$ zB mit i.S.v. Arithmetik/Ordnung unendlich großen (für $\mathbb{R}^*$ dann auch mit infinitesimalen) Elementen
- zu $\mathcal{R}$ gibt es auch abzählbare Nichtstandardmodelle $\mathcal{R}^*$
- andererseits sind $\mathcal{N}$ und $\mathcal{R}$ in der Mathematik axiomatisch bis auf Isomorphie fixiert ($\rightarrow$ Peano, Dedekind)

Peano-Strukturen

Standard-Peano-Struktur $\mathcal{P} := (\mathbb{N}, S, 0)$
mit $S\colon \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, S(n) := n + 1$ (Nachfolgerfunktion)
als σ_{p}-Struktur, $\sigma_p = (S, 0)$

Peano-Axiome

(P1): $0 \notin \mathrm{Bild}(S)$ $\qquad \forall x \neg Sx = 0$

(P2): S injektiv $\qquad \forall x \forall y \big(Sx = Sy \rightarrow x = y\big)$

(P3): keine echte Teilmenge hat 0 als Element und ist abgeschlossen unter S
(äquivalent zu Induktionsprinzip, nicht in $\mathrm{FO}(\sigma_p)$)

Satz von Dedekind

Jede σ_p-Struktur, die (P1), (P2), (P3) erfüllt, ist isomorph zur Standard-Peano-Struktur

was man nicht haben kann . . . . . . oder doch ?

- es gibt Erweiterungen von FO, die Charakterisierungen der Standardstrukturen $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{R}$ (bis auf Isomorphie) erlauben

  insbesondere leistet dies die natürliche Logik zweiter Stufe (SO) mit Quantifizierung über Mengen, Relationen, Funktionen, etc

aber jede Logik, die diese Möglichkeit bietet,

- verletzt Kompaktheit und
- hat keinen vollständigen, korrekten, finitären Beweiskalkül (!)

Ausweg für Grundlegung der Mathematik:

- Festhalten an FO
- Verschieben des Rahmens auf globale Sichtweise in einem Universum der Mengenlehre

  wo Mengen, Relationen und andere Konstrukte höherer Ordnung allesamt als Objekte erster Stufe verfügbar sind

zur Mathematik im Rahmen der Mengenlehre

anstatt z.B. die Standard-Peano-Struktur (oder z.B. die Standard-Modelle der Arithmetik) als isolierte Strukturen zu axiomatisieren:

- Axiomatisierung des Mengenuniversums als Hintergrundstruktur und Rahmen für die gesamte Mathematik

$\rightarrow$ Zermelo–Fraenkel Axiome mit Auswahlaxiom (ZFC) in FO

- interne Beschreibung/Definition entsprechender Strukturen mittels FO im Mengenuniversum

- interner Nachweis z.B. des Satzes von Dedekind in ZFC: $\mathrm{ZFC} \models$ "Satz von Dedekind"