AL Kompaktheit und Königs Lemma

Königs Lemma:
Jeder endlich verzweigte, unendliche Baum besitzt einen unendlichen Pfad

Kompaktheit für $\mathrm{AL}(V)$ mit abzählbar unendlichem V korrespondiert direkt zu Königs Lemma

[$\rightsquigarrow$ "derselbe Beweis", "dasselbe Auswahlprinzip"
und elementare Übersetzungen zwischen den Aussagen]

Beweiskalküle

Semantik: Wahrheit (Allgemeingültigkeit) und Konsequenz (Folgerungsbeziehung)

Formaler Beweis: syntaktische Zertifikate für Allgemeingültigkeit/Folgerungsbeziehungen

Beweiskalkül: Regelsysteme zur Erstellung solcher Zertifikate

Kriterien:
- **Korrektheit:** was beweisbar ist, ist wahr
- **Vollständigkeit:** alles, was wahr ist, ist beweisbar

Existenz korrekter und vollständiger Beweiskalküle für AL klar (warum?)
Wir zeigen starke Vollständigkeit, die Kompaktheit impliziert.

Für die Logik erster Stufe: $\rightarrow$ Gödelscher Vollständigkeitssatz (später)

ein AL-Sequenzenkalkül

Sequenz: endliche Formelkette der Form $\Gamma; \varphi$

Antezendenz $\Gamma \subseteq \mathrm{AL}$ endliche, ungeordnete (ggf. auch leere) Folge
Sukzedenz $\varphi \in \mathrm{AL}$
[Momentaufnahmen aus Beweisen]

Allgemeingültigkeit (für Sequenzen)**:**

$\Gamma; \varphi$ allgemeingültig gdw. $\Gamma \models \varphi$ Semantik!

Sequenzenkalkül: Regelsystem zur Erzeugung von Sequenzen
$\rightsquigarrow$ ableitbare Sequenzen Syntax!

Vollständigkeit (für Sequenzenkalkül)**:** ...

ein AL-Sequenzenkalkül

Sequenzenregeln: neue Sequenzen aus bereits abgeleiteten

Format: $\dfrac{\text{Prämissen}}{\text{Konklusion}}$

Beispiele: $\dfrac{}{\Gamma, \varphi; \varphi}$ oder $\dfrac{\Gamma, \varphi_1; \varphi \quad \Gamma, \varphi_2; \varphi}{\Gamma, (\varphi_1 \vee \varphi_2); \varphi}$

AL Sequenzenkalkül K   für AL mit $\neg, \vee, \bot$, ohne $\wedge, \top$

(V)	$\dfrac{}{\varphi; \varphi}$	$(\bot)$	$\dfrac{}{\bot; \varphi}$
(A)	$\dfrac{\Gamma; \varphi}{\Gamma, \Gamma'; \varphi}$		
$(\vee\mathrm{A})$	$\dfrac{\Gamma, \varphi_1; \varphi \qquad \Gamma, \varphi_2; \varphi}{\Gamma, (\varphi_1 \vee \varphi_2); \varphi}$	$(\vee\mathrm{S})$	$\dfrac{\Gamma; \varphi_i}{\Gamma; (\varphi_1 \vee \varphi_2)} \qquad (i = 1, 2)$
(FU)	$\dfrac{\Gamma, \psi; \varphi \qquad \Gamma, \neg\psi; \varphi}{\Gamma; \varphi}$	(W)	$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi; \psi \qquad \Gamma, \neg\varphi; \neg\psi}{\Gamma; \varphi}$

Korrektheit *der Regeln* nachprüfen!

Beispiele/abgeleitete Regeln

Ableitung der Sequenzen(regeln) für

- *verum*: $\Gamma; \neg\bot$
- *Doppelnegation*: $\varphi; \neg\neg\varphi$ und $\neg\neg\varphi; \varphi$
- *modus ponens (1)*: $\varphi, (\varphi \rightarrow \psi); \psi$

(0) $\dfrac{\Gamma, \neg\bot; \neg\bot \qquad \Gamma, \bot; \neg\bot}{\Gamma; \neg\bot}$ (FU) mit Prämissen aus (V),($\bot$),(A)

(1) $\dfrac{\neg\neg\varphi, \neg\varphi; \neg\varphi \qquad \neg\neg\varphi, \neg\varphi; \neg\neg\varphi}{\boldsymbol{\neg\neg\varphi; \varphi}}$ (W) aus (V),(A)

(2) $\dfrac{\varphi, \neg\varphi, \neg\psi; \varphi \qquad \varphi, \neg\varphi, \neg\psi; \neg\varphi}{\varphi, \neg\varphi; \psi}$ (W) aus (V),(A)

(3) $\dfrac{\varphi, \neg\varphi; \neg\neg\varphi \qquad \varphi, \neg\neg\varphi; \neg\neg\varphi}{\boldsymbol{\varphi; \neg\neg\varphi}}$ (FU) aus (2),(V),(A)

(4) $\dfrac{\varphi, \psi; \psi \qquad \varphi, \neg\varphi; \psi}{\boldsymbol{\varphi, (\neg\varphi \vee \psi); \psi}}$ ($\vee$A) aus (V),(A),(2)

Beispiele/abgeleitete Regeln

Ableitung der Sequenzen(regeln) für

- Varianten von *Widerspruch* und *ex falso quodlibet*

$$\dfrac{\dfrac{\boxed{\Gamma; \psi}}{\Gamma, \neg\varphi; \psi}\,(\mathrm{A}) \qquad \dfrac{\boxed{\Gamma; \neg\psi}}{\Gamma, \neg\varphi; \neg\psi}\,(\mathrm{A})}{\boxed{\Gamma; \varphi}}\,(\mathrm{W}) \qquad\qquad \dfrac{\Gamma; \psi \qquad \Gamma; \neg\psi}{\Gamma; \varphi}\,(\mathrm{W}')$$

$$\dfrac{\dfrac{\boxed{\Gamma; \bot}}{\Gamma, \neg\varphi; \bot}\,(\mathrm{A}) \qquad \dfrac{\Gamma; \neg\bot}{\Gamma, \neg\varphi; \neg\bot}\,(\mathrm{A}) \text{ auf } (0)}{\boxed{\Gamma; \varphi}}\,(\mathrm{W}) \qquad\qquad \dfrac{\Gamma; \bot}{\Gamma; \varphi}\,(\mathrm{EFQ})$$

- *modus ponens (2)* $\dfrac{\Gamma; \varphi \qquad \Gamma; (\neg\varphi \vee \psi)}{\Gamma; \psi}$ (als Übung!)

Vollständigkeit

Ableitbarkeit:

$\varphi \in \mathrm{AL}$ aus $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ ableitbar, $\Phi \vdash \varphi$, gdw.
eine Sequenz $\Gamma; \varphi$ mit $\Gamma \subseteq \Phi$ ableitbar ist.

Widerspruchsfreiheit, Konsistenz:

$\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ konsistent gdw. $\Phi \not\vdash \bot$

starke Vollständigkeit: Φ konsistent $\Rightarrow$ Φ erfüllbar

Beweisidee für K:

Jedes konsistente $\Phi \subseteq \mathrm{AL}(V)$ lässt sich erweitern zu maximal konsistentem $\Phi \subseteq \hat{\Phi} \subseteq \mathrm{AL}(V)$, das jedes $\varphi \in \mathrm{AL}(V)$ fixiert.
$\hat{\Phi}$ induziert eindeutige Interpretation $\mathcal{I}$, von der man induktiv nachweist dass $\mathcal{I} \models \varphi$ f.a. $\varphi \in \hat{\Phi}$.