Syntax und Semantik der Aussagenlogik (AL)

Syntax (zu Variablenmenge V)

$\mathrm{AL}(V)$ erzeugt durch (Kalkülschreibweise):

$$\frac{}{\alpha} \text{ für } \alpha \in V \cup \{\bot, \top\} \qquad \frac{\alpha_1, \alpha_2}{(\alpha_1 * \alpha_2)} \text{ für } * \in \{\wedge, \vee\} \qquad \frac{\alpha}{\neg\alpha}$$

Semantik

für Interpretation $\mathcal{I}\colon V \longrightarrow \mathbb{B}$ zur Belegung der AL-Variablen

definiere $\mathcal{I} \models \varphi$ ($\mathcal{I}$ erfüllt φ, $\mathcal{I}$ Modell von φ) über

$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$ (φ wahr unter $\mathcal{I}$)

durch Induktion über Syntax (Aufbau der Formeln)
anhand der booleschen Verknüpfungen in $\mathbb{B}$

Bemerkung: Extensionalität und Modularität

Syntax und Semantik der Aussagenlogik (AL)

Syntax (zu Variablenmenge V)

$\mathrm{AL}(V)$ erzeugt durch (Kalkülschreibweise):

$$\frac{}{\alpha} \text{ für } \alpha \in V \cup \{\bot, \top\} \qquad \frac{\alpha_1, \alpha_2}{(\alpha_1 * \alpha_2)} \text{ für } * \in \{\wedge, \vee\} \qquad \frac{\alpha}{\neg\alpha}$$

Semantik

für Interpretation $\mathcal{I}\colon V \longrightarrow \mathbb{B}$ zur Belegung der AL-Variablen

definiere $\mathcal{I} \models \varphi$ ($\mathcal{I}$ erfüllt φ, $\mathcal{I}$ Modell von φ) über

$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$ (φ wahr unter $\mathcal{I}$)

durch Induktion über Syntax (Aufbau der Formeln)
anhand der booleschen Verknüpfungen in $\mathbb{B}$

Bemerkung: Extensionalität und Modularität

L&G Sommer 2012 M Otto 9/16

weitere (eliminierbare) Junktoren

eliminierbar i.S.v. Abkürzungen

Implikation: $(\varphi \to \psi) := (\neg\varphi \vee \psi)$

Biimplikation: $(\varphi \leftrightarrow \psi) := ((\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\varphi \wedge \psi))$

extensionale Darstellung: $\to : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Semantische Grundbegriffe

Modellbeziehung: $\mathcal{I} \models \varphi$, $\mathcal{I} \models \Phi$

Definition der Semantik anhand $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$

Folgerungsbeziehung: $\varphi \models \psi$, $\Phi \models \psi$

$\Phi \models \psi$ gdw. für alle $\mathcal{I}$ gilt: wenn $\mathcal{I} \models \Phi$, so auch $\mathcal{I} \models \psi$

Logische Äquivalenz (semantische Gleichheit)**:** $\varphi \equiv \psi$

$\varphi \equiv \psi$ gdw. für alle $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{I} \models \psi$

Allgemeingültigkeit: φ allgemeingültig gdw. $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle $\mathcal{I}$

Erfüllbarkeit: φ erfüllbar gdw. $\mathcal{I} \models \varphi$ für mindestens ein $\mathcal{I}$

Beispiele/Zusammenhänge

$\psi \wedge \varphi_1 \models \psi \wedge (\varphi_1 \vee \psi_2)$

$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$\psi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\psi \wedge \varphi_1) \vee (\psi \wedge \varphi_2)$

φ allgemeingültig gdw. $\varphi \equiv \top$

φ erfüllbar gdw. $\varphi \not\equiv \bot$ gdw. $\neg\varphi$ nicht allgemeingültig

φ unerfüllbar gdw. $\varphi \equiv \bot$ gdw. $\varphi \models \bot$

Φ unerfüllbar gdw. $\Phi \models \bot$

$\varphi \models \psi$ gdw. $\varphi \rightarrow \psi$ allgemeingültig gdw. $\varphi \wedge \neg\psi$ unerfüllbar

$\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar

AL-Allgemeingültigkeit und BA-Gleichheitstheorie

aus der Vollständigkeit der Axiome für BA (vgl. Übungen):

Logische Äquivalenzen $\varphi(p_1, \dots, p_n) \equiv \varphi'(p_1, \dots, p_n)$

sind

Termgleichungen, die in der BA $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ gelten

sind

Termgleichungen, die aus den Axiomen für BA folgen

sind

Termgleichungen $f(P_1, \dots, P_n) = f'(P_1, \dots, P_n)$, die
in einer/jeder Potenzmengen-BA für alle Belegungen P_i gelten

[beachte Unabhängigkeit der Axiomatisierung von der Stelligkeit n]

Funktionale Vollständigkeit

Jede Funktion $f: \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ lässt sich
als Semantik einer AL_n-Formel $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ realisieren

Idee: DNF/KNF aus Wertetafel für $f \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel für φ

$|\mathrm{AL}_n \,/ \equiv| = |\{f : f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}\}| = ?$

AL über endlichen Variablenmengen $\leftrightsquigarrow$ endliche Kombinatorik

unendliche Variablen- und Formelmengen:
kombinatorischeÜberraschungen?

AL Kompaktheit

Logische Kompaktheit als Endlichkeitseigenschaft:

für $\Phi \subseteq \mathrm{AL}(V)$ sind äquivalent:
(i) Φ erfüllbar (d.h., ex. $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \varphi$ f.a. $\varphi \in \Phi$)
(ii) jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar

analog (und äquivalent) für die Folgerungsbeziehung:

$\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi_0 \models \varphi$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$

interessant nur für unendliche Φ und V

AL Kompaktheit und Königs Lemma

Königs Lemma:
Jeder endlich verzweigte, unendliche Baum besitzt einen unendlichen Pfad

Kompaktheit für $\mathrm{AL}(V)$ mit abzählbar unendlichem V korrespondiert direkt zu Königs Lemma

[$\rightsquigarrow$ "derselbe Beweis", "dasselbe Auswahlprinzip"
und elementare Übersetzungen zwischen den Aussagen]

Beweiskalküle

Semantik: Wahrheit (Allgemeingültigkeit) und
Konsequenz (Folgerungsbeziehung)

Formaler Beweis: syntaktische Zertifikate für
Allgemeingültigkeit/Folgerungsbeziehungen

Beweiskalkül: Regelsysteme zur Erstellung solcher Zertifikate

Kriterien: $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Korrektheit: } \text{was beweisbar ist, ist wahr} \\ \textbf{Vollständigkeit: } \text{alles, was wahr ist, ist beweisbar} \end{array} \right.$

Existenz korrekter und vollständiger Beweiskalküle für AL klar (warum?)
Für die Logik erster Stufe: $\rightarrow$ Gödelscher Vollständigkeitssatz (später)