(AC) und Äquivalente

in ZF äquivalent:

- **(AC):** Existenz einer Auswahlmenge
  zu jeder Menge disjunkter nicht-leerer Mengen

  Variante: Existenz einer Auswahlfunktion
  zu jeder Familie von nicht-leeren Mengen

- **Zornsches Lemma:**
  Jede Halbordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, hat maximale Elemente

- **Wohlordnungssatz:** Jede Menge lässt sich wohlordnen
  (ist bijektives Bild einer Ordinalzahl)

Mengen und Klassen

Formeln $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(\in)$ definieren im allgemeinen *Klassen* als Gesamtheiten von Mengen

Klassen sind entweder Mengen (Komprehensions-Ax. (SEP)) oder aber echte Klassen wie die "Allklasse" oder **On**

- $\varphi(x)$ definiert eine Menge: $\exists y \forall x \big(x \in y \leftrightarrow \varphi(x)\big)$

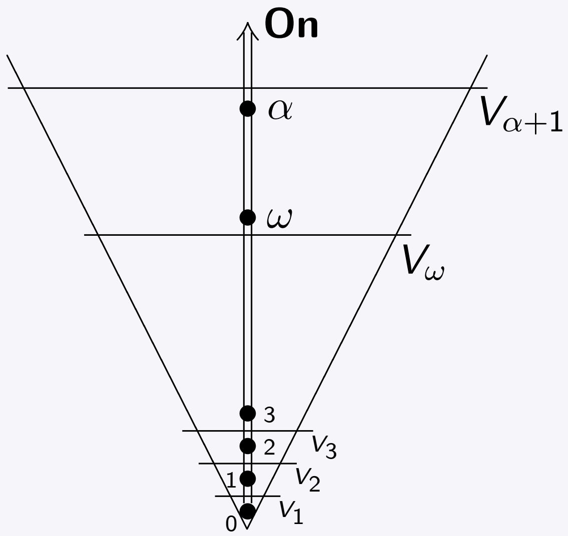
- Mengen sind "kleine Klassen"

- (AC): Mengen sind Kardinalitäts-messbare Klassen

Fundiertheit und die von Neumannsche Hierarchie

man definiert induktiv über die Klasse (!) aller Ordinalzahlen

die Niveaus der kumulativen Hierarchie $(\mathbf{V}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{On}}$:



$$\begin{aligned} V_0 &:= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &:= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &:= \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \\ &\quad \text{für Limes } \lambda \end{aligned}$$

Fundiertheit besagt
"$\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} \mathbf{V}_\alpha$"

prinzipielle Grenzen

wo nichts hilft (auch Mengenlehre nicht)

- inhärente Unvollständigkeit jeder brauchbaren Axiomatisierung eines ausreichend reichhaltigen mathematischen Bereichs:
  1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz
- prinzipielle Nicht-Nachweisbarkeit der Konsistenz brauchbarer Axiomatisierungen:
  2. Gödelscher Unvollständigkeitssatz

Errungenschaften der axiomatischen Mengenlehre

- bewährt und gut analysiert als verbindlicher Rahmen
- **relative Konsistenzaussagen**, z.B. bzgl. (Found) und (AC)
- Prinzipien der unendlichen Kombinatorik

Hilbertsches Programm

David Hilbert (1862–1943)

Grundlagenprogrammatik:
vollständige Axiomatisierung mit
Nachweis der Widerspruchsfreiheit

Kurt Gödel (1906–1978)

beides unmöglich
prinzipielle Grenzen
Mathematik "offen"

Berechenbarkeit: Grundbegriffe & prinzipielle Grenzen

- was ist ein Algorithmus?
- mathematische Präzisierungen: $\left\{\begin{array}{l}\text{Berechenbarkeit}\\ \text{Entscheidbarkeit}\\ \text{Aufzählbarkeit}\end{array}\right.$
- Unentscheidbarkeit

Al Chwarismi $\rightsquigarrow$ *Algorithmus*
Bagdad um 800