Ordinalzahlen

Mengen, die unter $\in$-Vorgängern abgeschlossen sind
und auf denen $\in$ eine *Wohlordnung* induziert

$\alpha \in \mathbf{On} \ := \ \forall x \big(x \in \alpha \to x \subseteq \alpha \ \wedge \ \dots \big) \ \in \mathrm{FO}(\in)$

Bsp.: $0, 1, 2, \dots, n, S(n) = n \cup \{n\}, \dots, \omega, S(\omega) = \omega \cup \{\omega\}, \dots$

On, die Klasse aller Ordinalzahlen:

- echte Klasse, keine Menge (Burali–Forti)
- selbst wohlgeordnet durch $\in$
- unterscheide Nachfolger- und Limes-Ordinalzahlen
- Definitionen und Beweise durch transfinite Induktion

Idee: ordnungstheoretische Verallgemeinerung von $(\omega, <)$,
mit ordinaler Arithmetik, wobei z.B. $S(\alpha) = \alpha + 1$ ist

transfinite Induktion über On:

- zur Definition einer Operation $\alpha \mapsto A(\alpha)$ auf **On**
- zum Nachweis einer Behauptung $A(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbf{On}$

Anfang:	$A(0)$
Nachfolger-Schritt:	von $A(\alpha)$ nach $A(S(\alpha))$
Limes-Schritt:	von $\big(A(\alpha)\big)_{\alpha<\gamma}$ nach $A(\gamma)$

oder uniformer (und allgemeiner):

gewinne $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})$ aus $\big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\beta})\big)_{\boldsymbol{\beta}<\boldsymbol{\alpha}}$

Beispiel: ordinale Addition

Kardinalität & die Struktur des Unendlichen (Cantor)

- Kardinalitätsvergleich

$x \preccurlyeq y$: Existenz einer Injektion $f : x \to y$
(für $x \neq \emptyset$ folgt: ex. Surjektion $g : y \to x$; äq. unter (AC))

induziert Präordnung mit Äquivalenz $x \approx y$:
Existenz einer Bijektion (Satz von Cantor–Schröder–Bernstein)

- Kardinalzahlen als spezielle Ordinalzahlen:
  κ Kardinalzahl gdw. $\forall \alpha (\alpha < \kappa \;\to\; \kappa \not\approx \alpha)$

- Auswahlaxiom (AC)/Wohlordnungssatz:
  jede Menge bijektiv verwandt zu einer Kardinalzahl,
  $\rightsquigarrow$ Kardinalzahlen als universelle Mächtigkeitsskala

Kardinalitätsargumente


Georg Cantor

Beispiele

- $\omega \approx \omega \setminus n$ für jedes $n \in \omega$

  und $\omega \approx \{n + n : n \in \omega\}$

- $\omega \approx \omega \times \omega$

  Cantorsche Diagonal-Abzählung für $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$
  allg. bleiben abz. Vereinigungen abz. Mengen abzählbar

- $\omega \prec 2^{\omega} := \{f : \text{ “}f \text{ Funktion von } \omega \text{ nach } 2 = \{0,1\}\text{” } \} \approx \mathcal{P}(\omega)$

  Cantorsche Diagonalisierung für $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{N}$
  allg. ex. keine Surjektion von x auf $\mathcal{P}(x)$

(AC) und Äquivalente

in ZF äquivalent:

- **(AC):** Existenz einer Auswahlmenge
  zu jeder Menge disjunkter nicht-leerer Mengen

  Variante: Existenz einer Auswahlfunktion
  zu jeder Familie von nicht-leeren Mengen

- **Zornsches Lemma:**
  Jede Halbordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge
  eine obere Schranke besitzt, hat maximale Elemente

- **Wohlordnungssatz:** Jede Menge lässt sich wohlordnen
  (ist bijektives Bild einer Ordinalzahl)

Mengen und Klassen

Formeln $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(\in)$ definieren im allgemeinen
Klassen als Gesamtheiten von Mengen

Klassen sind entweder Mengen (Komprehensions-Ax. (SEP))
oder aber echte Klassen wie die "Allklasse" oder **On**

- $\varphi(x)$ definiert eine Menge: $\exists y \forall x \big(x \in y \leftrightarrow \varphi(x)\big)$

- Mengen sind "kleine Klassen"

- (AC): Mengen sind Kardinalitäts-messbare Klassen