

Ordinalzahlen

Mengen, die unter \in -Vorgängern abgeschlossen sind
und auf denen \in eine *Wohlordnung* induziert

$$\alpha \in \mathbf{On} := \forall x (x \in \alpha \rightarrow x \subseteq \alpha \wedge \dots) \in \text{FO}(\in)$$

Bsp.: $0, 1, 2, \dots, n, S(n) = n \cup \{n\}, \dots, \omega, S(\omega) = \omega \cup \{\omega\}, \dots$

On, die Klasse aller Ordinalzahlen:

- echte Klasse, keine Menge (Burali–Forti)
- selbst wohlgeordnet durch \in
- unterscheide Nachfolger- und Limes-Ordinalzahlen
- Definitionen und Beweise durch transfiniten Induktion

Idee: ordnungstheoretische Verallgemeinerung von $(\omega, <)$,
mit ordinaler Arithmetik, wobei z.B. $S(\alpha) = \alpha + 1$ ist

transfiniten Induktion über On:

- zur Definition einer Operation $\alpha \mapsto A(\alpha)$ auf **On**
- zum Nachweis einer Behauptung $A(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbf{On}$

Anfang:	$A(0)$
Nachfolger-Schritt:	von $A(\alpha)$ nach $A(S(\alpha))$
Limes-Schritt:	von $(A(\alpha))_{\alpha < \gamma}$ nach $A(\gamma)$

oder uniformen (und allgemeiner):

gewinne $A(\alpha)$ aus $(A(\beta))_{\beta < \alpha}$

Beispiel: ordinale Addition

Kardinalität & die Struktur des Unendlichen (Cantor)

-

Kardinalitätsvergleich

$x \preceq y$: Existenz einer Injektion $f: x \rightarrow y$
(für $x \neq \emptyset$ folgt: ex. Surjektion $g: y \rightarrow x$; äq. unter (AC))

induziert Präordnung mit Äquivalenz $x \approx y$:
Existenz einer Bijektion (Satz von Cantor–Schröder–Bernstein)

- Kardinalzahlen als spezielle Ordinalzahlen:
 κ Kardinalzahl gdw. $\forall \alpha (\alpha < \kappa \rightarrow \kappa \not\approx \alpha)$
- Auswahlaxiom (AC)/Wohlordnungssatz:
jede Menge bijektiv verwandt zu einer Kardinalzahl,
 \rightsquigarrow Kardinalzahlen als universelle Mächtigkeitsskala

Kardinalitätsargumente

Beispiele

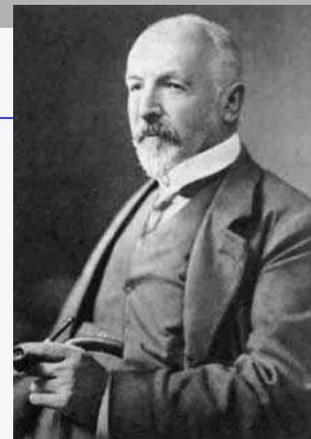
- $\omega \approx \omega \setminus n$ für jedes $n \in \omega$
und $\omega \approx \{n + n : n \in \omega\}$

- $\omega \approx \omega \times \omega$

Cantorsche Diagonal-Abzählung für $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$
allg. bleiben abz. Vereinigungen abz. Mengen abzählbar

- $\omega \prec 2^\omega := \{f: \text{"}f \text{ Funktion von } \omega \text{ nach } 2 = \{0, 1\}\text{"}\} \approx \mathcal{P}(\omega)$

Cantorsche Diagonalisierung für $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{N}$
allg. ex. keine Surjektion von x auf $\mathcal{P}(x)$



Georg Cantor

(AC) und Äquivalente

in ZF äquivalent:

- **(AC):** Existenz einer Auswahlmenge zu jeder Menge disjunkter nicht-leerer Mengen
Variante: Existenz einer Auswahlfunktion zu jeder Familie von nicht-leeren Mengen
- **Zornsches Lemma:**
Jede Halbordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, hat maximale Elemente
- **Wohlordnungssatz:** Jede Menge lässt sich wohlordnen (ist bijektives Bild einer Ordinalzahl)

Mengen und Klassen

Formeln $\varphi(x) \in \text{FO}(\in)$ definieren im allgemeinen *Klassen* als Gesamtheiten von Mengen

Klassen sind entweder Mengen (Komprehensions-Ax. (SEP)) oder aber echte Klassen wie die "Allklasse" oder **On**

- $\varphi(x)$ definiert eine Menge: $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$
- Mengen sind "kleine Klassen"
- (AC): Mengen sind Kardinalitäts-messbare Klassen