Logik und Grundlagen

- **Aussagenlogik**
  Boolesche Algebra, AL-Operatoren und Mengenoperationen
  Syntax und Semantik der AL, logische Grundbegriffe
  Schließen und Beweisen, ein vollständiger Beweiskalkül
- **Logik erster Stufe (Quantorenlogik)**
  Syntax und Semantik, ein vollständiger Beweiskalkül
  Axiomatisierbarkiet, Beweisbarkeit und ihre Grenzen
- **Mathematik im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre**
  Axiomensystem der Mengenlehre (ZFC)
  Konstruktionen und Methoden der Mengenlehre
- **Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit**
  prinzipielle Berechenbarkeit und ihre Grenzen

  Möglichkeiten und prinzipielle Grenzen für
  die Fundierung der Mathematik

Aussagenlogik: ein Beispiel

Charles Dodgson, 1831–1898

15.

Six friends, and their six wives, are staying in the same hotel; and they all walk out daily, in parties of various size and composition. To ensure variety in these daily walks, they have agreed to observe the following Rules:—

(1) If Acres is with (i.e. is in the same party with) his wife, and Barry with his, and Eden with Mrs. Hall, Cole must be with Mrs. Dix;
(2) If Acres is with his wife, and Hall with his, and Barry with Mrs. Cole, Dix must *not* be with Mrs. Eden;
(3) If Cole and Dix and their wives are all in the same party, and Acres *not* with Mrs. Barry, Eden must *not* be with Mrs. Hall;
(4) If Acres is with his wife, and Dix with his, and Barry *not* with Mrs. Cole, Eden must be with Mrs. Hall;
(5) If Eden is with his wife, and Hall with his, and Cole with Mrs. Dix, Acres must *not* be with Mrs. Barry;
(6) If Barry and Cole and their wives are all in the same party, and Eden *not* with Mrs. Hall, Dix must be with Mrs. Eden.

The Problem is to prove that there must be, every day, at least *one* married couple who are not in the same party.

Lewis Carroll: Symbolic Logic and The Game of Logic (1896)
Appendix, Addressed to Teachers

Mengenoperationen und Aussagenveknüpfungen

Mengen und Mengenoperationen

Elementbeziehung: $a \in M$ bzw. $a \notin M$ für “nicht $a \in M$”

Teilmengenbeziehung (Inklusion): $B \subseteq A$

Potenzmenge: $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$
die Menge aller Teilmengen von A

Gleichheit von Mengen: $A = B$ gdw ($A \subseteq B$ und $B \subseteq A$)

Definition von Teilmengen: $\{a \in M : a \text{ hat Eigenschaft } E\} \subseteq M$

Mengenoperationen und Aussagenveknüpfungen

Boolesche Mengenoperationen in $\mathcal{P}$(M)

Durchschnitt: $A \cap B = \{c : c \in A \text{ und } c \in B\}$

Vereinigung: $A \cup B = \{c : c \in A \text{ oder } c \in B\}$

Komplement: $\overline{B} := M \setminus B = \{a \in M : a \notin B\}$

Wahrheitswerte und boolesche Verknüpfungen

Wahrheitswerte in $\mathbb{B} = \{0, 1\}$

$1 \in \mathbb{B}$ steht für **wahr** $0 \in \mathbb{B}$ steht für **falsch**

Boolesche Logik-Operationen auf $\mathbb{B} = \{0, 1\}$

Konjunktion ("und"): $\wedge \colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Disjunktion ("oder"): $\vee \colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

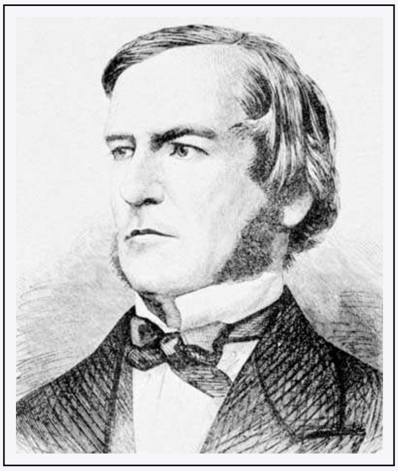
$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Negation ("nicht"): $\neg \colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

	0	1
$\neg$	1	0

George Boole, 1815–1864

An investigation of the laws of thought (1854)



Axiome für Boolesche Algebren $(\mathbf{B}, \cdot, +, \,', 0, 1)$:

BA1: $+$ und $\cdot$ assoziativ und kommutativ.

Für alle x, y, z: $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\quad x+y = y+x$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

BA2: $+$ und $\cdot$ distributiv.

Für alle x, y, z: $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

$$x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$$

BA3: 0 und 1 als neutrale Elemente.

Für alle x: $x \cdot 1 = x \qquad x + 0 = x$

BA4: Komplement.

$0 \neq 1$ und für alle x: $x \cdot x' = 0 \qquad x + x' = 1$

Beispiele: $(\mathcal{P}(\mathbf{M}), \cap, \cup, \bar{\ }, \emptyset, \mathbf{M})$ für $M \neq \emptyset$; $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

Boolesche Algebra: Konsequenzen aus Axiomen

- Idempotenz: für alle x gilt $x \cdot x = x$ und $x + x = x$.
- Für alle x gilt: $x + 1 = 1$ und $x \cdot 0 = 0$.
- Absorption: für alle x, y gilt $x \cdot (x+y) = x = x + x \cdot y$.
- Durch die beiden Bedingungen $x \cdot x' = 0$ und $x + x' = 1$ ist zu jedem x das Element x' eindeutig bestimmt.
- Involution: für alle x ist $(x')' = x$.
- De Morgan: für alle x, y gilt $(x+y)' = x' \cdot y'$ und $(x \cdot y)' = x' + y'$.

Dualität: Die Komplementabbildung $x \mapsto x'$ ist in jeder BA eine Bijektion, die die Rollen von $\cdot/+$ und $0/1$ vertauscht.

Vollständigkeit: axiomatisiert die Gleichungstheorie jeder BA, jeder Potenzmengen-BA, und der Standard-BA $\mathbb{B}$ (!)