Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vržina

SS 2012
19. Juli bis 16. August 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kompakta mit glattem Rand)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist $K := [a, b]$ ein Kompaktum mit glattem Rand.

(b) Die Menge $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$ ist ein Kompaktum mit glattem Rand.

Aufgabe G2 (Einfache Beispiele zum Gaußschen Integralsatz)

(a) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sei $K^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$. Betrachten Sie ferner das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad F(x) := x.$$

Wenden Sie den Gaußschen Integralsatzes auf K^n und F an um folgende Gleichung zu zeigen:

$$\lambda_n(K) = \frac{1}{n}\sigma_{\mathbb{S}^{n-1}}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

(b) Überlegen Sie sich, dass der Gaußsche Integralsatz für Dimension $n = 1$ gerade den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt.
Hinweis: Aufgabe G1 (a).

(c) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $u \in \mathscr{C}^1(K, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\int_K \operatorname{grad}(u)\, d\lambda^n = \int_{\partial K} u \cdot \nu \, d\sigma_{\partial K}.$$

Dabei ist diese Gleichung komponentenweise zu verstehen, d.h.

$$\int_K \partial_j u \, d\lambda^n = \int_{\partial K} u \cdot \nu_j \, d\sigma_{\partial K}, \qquad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Folgern Sie $\int_{\partial K} \nu \, d\sigma_{\partial K} = 0$.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass für $\omega_n := \sigma_{\mathbb{S}^{n-1}}(\mathbb{S}^{n-1})$ gilt

$$\omega_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

wobei $\Gamma\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $\Gamma(x) := \int_{]0,\infty[} t^{x-1} \exp(-t)\, d\lambda(t)$ die *Gamma-Funktion* bezeichnet. Bis $n = 7$ wächst ω_n und fällt anschließend mit $\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$.

Aufgabe G3 (Divergenz als Flussdichte)
In dieser Aufgabe wollen wir mathematisch präzise verstehen, wieso die Divergenz als Flussdichte betrachtet werden kann.

(a) Es sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Für $r > 0$ bezeichne $K_r := \overline{K_r(x_0)}$ die abgeschlossene Kugel vom Radius r um x_0. Wir betrachten den sogenannten *Fluss*

$$\int_{\partial K_r} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma_{\partial K_r}$$

von F durch die Sphäre ∂K_r vom Radius r um x_0, wobei $\nu\colon \partial K_r \to \mathbb{R}^n$ jeweils das äußere Normalenfeld von ∂K_r bezeichnet.

Zeigen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz, dass folgende Gleichun g gilt:

$$\operatorname{div}(F)(x_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda^n(K_r)} \int_{\partial K_r} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma_{\partial K_r}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\operatorname{div}(F)(x_0) = \frac{1}{\lambda^n(K_r)} \int_{K_r} \operatorname{div}(F)(x_0) \, d\lambda^n$.

(b) Sei nun allgemeiner $(K_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Kompakta mit glattem Rand mit $x_0 \in K_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und folgender Eigenschaft: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $K_k \subseteq K_\varepsilon(x_0)$ für alle $k \geq N$ gilt.

Zeigen Sie, dass auch in diesem Fall die Aussage aus (a) gilt, d.h.

$$\operatorname{div}(F)(x_0) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\lambda^n(K_k)} \int_{\partial K_k} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma_{\partial K_k}.$$

Aufgabe G4 (Volumenberechnung)
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $h \in]0, \infty[$. Wir betrachten nun einen Kegel der Höhe h über B mit Spitze in $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, d.h. wir schauen uns folgende Menge an:

$$K := \left\{ (tx, -ht) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in B \text{ und } t \in [0,1] \right\}.$$

Berechnen Sie $\lambda^{n+1}(K)$ auf zwei Weisen:

(a) Mit dem Prinzip von Cavalieri (siehe Aufgabe G1 auf Übungsblatt 11).

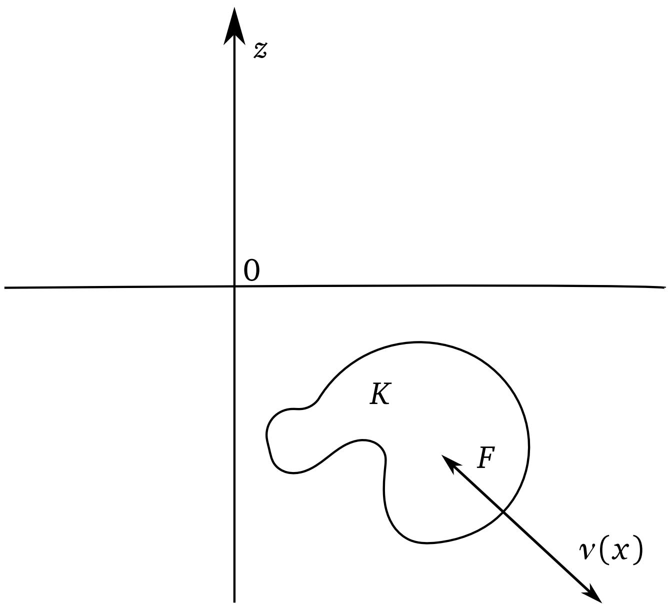
(b) Mit dem Gaußschen Integralsatz, welchen Sie hier ohne weitere Diskussion benutzen dürfen, auch wenn ∂K nicht glatt ist – bis auf eine „Nullmenge“ ist ∂K glatt und in solchen Situationen gilt der Integralsatz von Gauß ebenfalls.

Hinweis: Die Vorgehensweise aus Aufgabe G2 (a) ist hier nützlich.

Aufgabe G5 (Anwendung: Prinzip von Archimedes)
In dieser Aufgabe wollen wir Aufgabe G2 (c) physikalisch interpretieren.
Ein fester Körper K befinde sich in einer Flüssigkeit der konstanten Dichte $c > 0$, deren Oberfläche mit der Ebene $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ zusammenfalle. Wir interpretieren K als Kompaktum mit glattem Rand und nehmen

$$K \subseteq \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\}$$

an.
Im Punkt $x \in \partial K$ übt die Flüssigkeit auf den Körper einen Druck der Größe $cx_3\nu(x)$ aus, wobei hier $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$ der äußere Normalenvektor von K im Punkt x ist.
Man beachte: Es ist $x_3 < 0$; der Druck ist also nach innen gerichtet, siehe Bild.



Für die gesamte Auftriebskraft $F = (F_1, F_2, F_3)$ erhält man

$$F = \int_{\partial K} cx_3\nu(x)\, d\sigma_{\partial K}(x).$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0 \quad \text{und} \quad F_3 = c\lambda^3(K).$$