Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vržina

SS 2012
11. und 12. Juli 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Basiswechsel als Kartenwechsel)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein d-dimensionaler Untervektorraum mit $d \geq 1$. Für eine Basis $\mathscr{B} = \{b_1, \ldots, b_d\}$ von M sei

$$\varphi_{\mathscr{B}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_d) := \sum_{j=1}^{d} x_j b_j.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi_{\mathscr{B}}$ eine Einbettung ist. Also ist $M = \varphi_{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ (siehe Abschnitt 6.4 (b)).

(b) Sei $\mathscr{C} = \{c_1, \ldots, c_d\}$ eine weitere Basis von M. Interpretieren Sie den Kartenwechsel $\varphi_{\mathscr{C}}^{-1} \circ \varphi_{\mathscr{B}}$.

Aufgabe G2 (Gramsche Determinante von Graphen)

(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen und $h \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung. Bestimmen Sie die Gramsche Determinante des Graphen

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(x) := (x, h(x)).$$

Wie kann man die Gramsche Determinante deuten?

Sei nun $b \in \mathbb{R}^n$ und $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(x) := \langle x, b \rangle$. Der Graph dieser linearen Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \varphi(x) := (x, \langle x, b \rangle)$$

ist dann eine Hyperebene $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$; diese Hyperebene ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit nach G1 (a).

(b) Zeigen Sie: Für den Maßtensor gilt

$$g_\varphi = E_n + b b^\top.$$

(c) Zeigen Sie: Es gilt $\sqrt{\det(g_\varphi)} = \sqrt{1 + \|b\|^2}$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, b \rangle = 0\}$ ein Eigenraum von g_φ ist. Was ist der zugehörige Eigenwert? Was ist mit b selbst?

(d) In welche Richtungen werden Längen im Graphen verzerrt?

Sei nun $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $h \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung. Wir betrachten nun den nicht-linearen Graphen

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \varphi(x) := (x, h(x)).$$

(e) Bestimmen Sie mit Hilfe des linearen Falles $\sqrt{\det(g_\varphi)}$.

Aufgabe G3 (Flächenintegral)
Sei $r > 0$ und $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Berechnen Sie das folgende Flächenintegral:

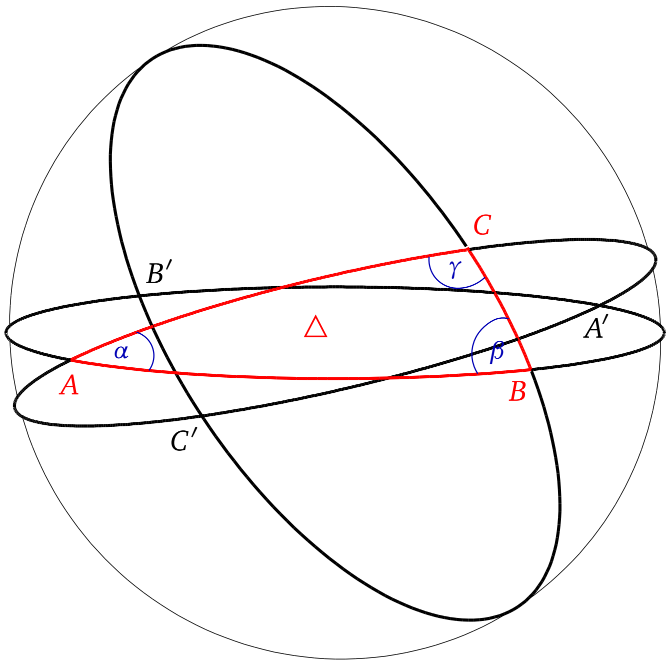
$$\int_M y^2 z \, d\sigma_M(x,y,z).$$

Hinweis: Benutzen Sie den Holzhammer nur auf eigene Verantwortung.

Aufgabe G4 (Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks)
Wir betrachten die Sphäre $\mathbb{S}^2 := \partial K_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$. Ein *Großkreis* auf $\mathbb{S}^2$ ist der Schnitt von $\mathbb{S}^2$ mit einem 2-dimensionalen linearen Teilraum von $\mathbb{R}^3$.
Ein *sphärisches Dreieck* auf $\mathbb{S}^2$ ist ein von drei Großkreisen berandetes Gebiet. Dabei sind zwei Gebiete möglich: Einmal das Dreieck $\triangle$ mit den Eckpunkten A, B, C und das dazu antipodische Dreieck $\triangle'$ mit Eckpunkten A', B', C'. Dabei ist $\triangle' = -\triangle$; siehe auch das Bild weiter unten.
Seien α, β und γ die Innenwinkel des sphärischen Dreiecks $\triangle$ mit Eckpunkten A, B und C. Zeigen Sie: Für den Flächeninhalt von $\triangle$ auf $\mathbb{S}^2$ gilt

$$\sigma_{\mathbb{S}^2}(\triangle) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass $\triangle'$ und $\triangle$ die gleichen Innenwinkel und den gleichen Flächeninhalt auf $\mathbb{S}^2$ haben. Betrachten Sie ferner die Sektoren mit Eckpunkten A, A' und B, B' sowie C, C'. Wie können Sie damit die Sphäre überdecken?



Bemerkung. In dieser Aufgabe haben wir gesehen, dass die Innenwinkelsumme eines sphärischen Dreiecks immer größer π ist. In der sphärischen Geometrie sind Dreiecke also „dick". Im Gegensatz dazu sind Dreiecke in der hyperbolischen Geometrie „schmal". Der Grund dafür ist, dass die Sphäre „positive Krümmung" hat und die hyperbolische Ebene „negative Krümmung" besitzt – in der Euklidischen Geometrie gibt es solche Phänomene nicht, weil die Euklidische Ebene „ungekrümmt" ist.
In diesem Sinne kann man

$$K := \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{\operatorname{vol}_2(\triangle)}$$

als Krümmung interpretieren: In der Euklidische Geometrie ist die Innenwinkelsumme eines Dreiecks gleich π, also $K(\mathbb{R}^2) = 0$. Für die Sphäre ist $K(\mathbb{S}^2) = 1$ und schließlich gilt $K(\mathbb{H}^2) = -1$ für die hyperbolische Ebene.