Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
12. Übungsblatt

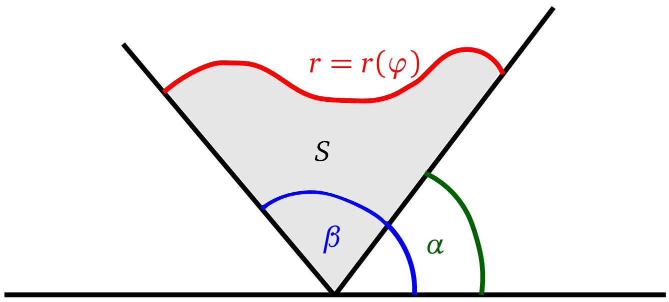
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vržina

SS 2012
4. bis 9. Juli 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Leibnizsche Sektorformel)
Es seien $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ mit $\alpha \leq \beta$ und $r\colon [\alpha, \beta] \to]0, \infty[$ eine stetige Funktion. Der Sektor S sei der abgeschlossene Bereich, der berandet wird von zwei Ursprungsgeraden mit Winkeln α und β sowie der in Polarkoordinaten gegebenen Kurve $r = r(\varphi)$.



Beweisen Sie: Für das Lebesgue-Maß dieses Sektors gilt

$$\lambda^2(S) = \int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{2} \left(r(\varphi)\right)^2 \, d\lambda(\varphi).$$

Aufgabe G2 (Untermannigfaltigkeiten)
Veranschaulichen Sie sich folgende Mengen und entscheiden Sie, welche dieser Mengen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind. Benutzen Sie dabei eine der vier Charakterisierungen aus dem Hauptsatz über Untermannigfaltigkeiten in Abschnitt 6.4.

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ oder } y = 0\}$

(f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$

(g) $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{(0,y,1) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}$

(h) $[0,1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Aufgabe G3 (Bilder von Nullmengen)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Wir haben schon gesehen, dass stetige Abbildungen nicht unbedingt Nullmengen auf Nullmengen abbilden. Unter zusätzlichen Annahmen ist dies der Fall. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Ist φ Lipschitz-stetig und $N \subseteq U$ eine Nullmenge, dann ist $\varphi(N)$ eine Nullmenge.
(b) Ist φ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung und $N \subseteq U$ eine Nullmenge, so ist $\varphi(N)$ eine Nullmenge.
(c) Sei φ ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus mit $\varphi(U) = V$. Dann gilt $\varphi(\mathscr{L}(U)) = \mathscr{L}(V)$.

Hinweis: Es ist $N \subseteq U$ eine Nullmenge genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $N \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^n(Q_k) < \varepsilon$ gibt. Benutzen Sie ferner die Supremumsnorm auf $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe G4 (Beispiel einer glatten Zerlegung der Eins)
Wir betrachten die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & \text{falls } t \in]-1,1[, \\ 0 & \text{falls } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Für das Folgende dürfen Sie benutzen, dass φ eine glatte Funktion mit kompakten Träger ist (bekannt aus Analysis II). Ferner betrachten wir zu $\varepsilon > 0$ und $b \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$\varphi_{\varepsilon,b}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_{\varepsilon,b}(x) := \varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\|x-b\|\right).$$

(a) Beschreiben Sie die Träger von $\varphi_{\varepsilon,b} \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ geometrisch und skizzieren Sie für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ die Träger von $\varphi_{\varepsilon,b} \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ für einige $b \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$.
(b) Sei $\varepsilon > 0$. Warum gilt $\Phi_\varepsilon(x) := \sum_{b\in\varepsilon\mathbb{Z}^2} \varphi_{\varepsilon,b}(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$?

Wir setzen nun

$$\psi_{\varepsilon,b}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \psi_{\varepsilon,b}(x) := \frac{\varphi_{\varepsilon,b}(x)}{\Phi_\varepsilon(x)}.$$

(c) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\sum_{b\in\varepsilon\mathbb{Z}^2} \psi_{\varepsilon,b}(x) = 1.$$

(d) Sei f in $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^2)$ und für $\varepsilon > 0$ sei $\varphi_\varepsilon(x) := \sum_{I\in\varepsilon\mathbb{Z}^2} f(I)\psi_{\varepsilon,I}(x)$. Zeigen Sie: Für alle $\sigma > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|f - \varphi_\delta\|_\infty < \sigma$.
Hinweis: Es gilt $f = f \cdot 1$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Ein wichtiges Integral) (1 Punkt)
In dieser Aufgabe wollen wir das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, d\lambda(x)$$

bestimmen. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(a) Werten Sie einerseits das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2+y^2))\, d\lambda^2(x,y) \tag{$*$}$$

durch eine naheliegende Transformation aus.
(b) Wenden Sie andererseits auf $(*)$ den Satz von Fubini an.
(c) Bestimmen Sie aus (a) und (b) den Wert des genannten Integrals.

Ein maßtheoretischer Blick auf die hyperbolische Ebene

Euklid formulierte fünf Postulate für die – von uns – sogenannte *Euklidische Geometrie*. Von diesen fünf Postulaten war das Parallelenpostulat das meist diskutierte. Es hat zum Beispiel zur Folge, dass die Innenwinkelsumme eines Euklidischen Dreiecks immer π beträgt.
Es war 2000 Jahre lang ein Problem zu entscheiden, ob das Parallelenpostulat aus den anderen vier Postulaten folgt oder nicht. Es sollte bis zum 19. Jahrhundert dauern um die ersten Geometrien zu entwickeln in denen alle Postulate bis auf das Parallelenpostulat gelten: Gauß veröffentlichte seine Arbeiten darüber nicht, aber Lobachevsky (1829) und Bolyai (1832) taten dies. In diesen sogenannten *imaginären Geometrien* (Lobachevsky) bzw. *absoluten Geometrien* (Bolyai) wurde das Parallelenpostulat axiomatisch durch folgendes Postulat ersetzt: zu jeder Geraden und einem nicht auf ihr liegenden Punkt gibt es unendlich viele parallele Geraden durch diesen Punkt.
Realisierungen der hyperbolischen Geometrie waren den Entdeckern aber nicht bekannt und erst mit dem Begriff der (abstrakten) *Riemannschen Mannigfaltigkeit* konnten gute Modelle der hyperbolischen Ebene angegeben werden.
An dieser Stelle eine Literaturempfehlung, die auch einen Einblick in die Geschichte der hyperbolischen Geometrie (und mehr) enthält: „Geometrie des Universums“ bzw. „Poetry of the Universe“ von Robert Osserman.
Wir wollen im Folgenden ein Modell der hyperbolischen Ebene einführen, das *obere Halbebenen Modell*. Dabei wählen wir einen maßtheoretischen Zugang.

Definition (Hyperbolische Ebene, hyperbolischer Flächeninhalt und hyperbolische Bewegung)**.**

(a) Sei $\mathbb{H}^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ die obere Halbebene und

$$f_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \to]0,\infty[, \qquad (x,y) \mapsto \frac{1}{y^2}.$$

Das Tupel $\left(\mathbb{H}^2, f_{\mathbb{H}^2}\right)$ heißt *hyperbolische Ebene*.

(b) Sei $\mathscr{B}(\mathbb{H}^2)$ die Borel-σ-Algebra auf der oberen Halbebene und $\nu_{\mathbb{H}^2}$ das Maß mit Dichte $f_{\mathbb{H}^2}$ bezüglich des Lebesgue-Maßes λ^2. Für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{H}^2)$ nennen wir

$$\nu_{\mathbb{H}^2}(A) = \int_A \frac{1}{y^2}\, d\lambda^2(x,y)$$

auch *hyperbolischen Flächeninhalt* von A.

(c) Eine Möbiustransformation

$$T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

heißt *hyperbolische Bewegung*, wenn a,b,c,d reelle Zahlen mit $ad - bc = 1$ sind.

Die hyperbolische Ebene kann man sich in diesem Modell somit als inhomogenes Medium mit Dichteverteilung $f_{\mathbb{H}^2}$ vorstellen.

Aufgabe H2 (Hyperbolische Bewegungen sind maßerhaltend) (1 Punkt)
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die hyperbolischen Bewegungen ihrem Namen gerecht werden. Sei dazu eine hyperbolische Bewegung T gegeben und weisen Sie folgende Aussagen nach:

(a) Es ist $T(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ und $T : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ ist ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus.
Hinweis: Identifizieren Sie $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und betrachten Sie den Imaginärteil von T. Was ist die Umkehrabbildung von T?

(b) Die hyperbolische Bewegung T ist maßerhaltend bezüglich $\nu_{\mathbb{H}^2}$, d.h. $T(\nu_{\mathbb{H}^2}) = \nu_{\mathbb{H}^2}$.
Hinweis: Nutzen Sie aus, dass T auf $\mathbb{H}^2$ holomorph ist. Wie können Sie damit $\left|\det(dT(x,y))\right|$ möglichst einfach ausrechnen?

Hyperbolische Geraden und hyperbolische Dreiecke

Definition (Hyperbolische Gerade)**.** Für eine differenzierbare Kurve $c\colon I \to \mathbb{H}^2$ definieren wir die *hyperbolische Länge von c* durch

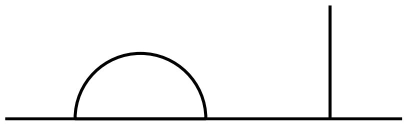
$$L_{\mathbb{H}^2}(c) = \int_I \left\|c'(t)\right\|_{\mathbb{R}^2} \cdot f_{\mathbb{H}^2}(c(t))\, d\lambda(t).$$

Eine Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ heißt *hyperbolische Gerade*, wenn für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt:

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma|_{[a,b]}) = \inf\{L_{\mathbb{H}^2}(c) \,|\, c\colon [a,b] \to \mathbb{H}^2 \text{ differenzierbare Kurve mit } c(a) = \gamma(a) \text{ und } c(b) = \gamma(b)\}.$$

Die Existenz von Kurven, die die Länge zwischen zwei Punkten minimieren, ist a priori nicht klar. Sie dürfen jedoch benutzen, dass je zwei Punkte in $\mathbb{H}^2$ auf genau einer hyperbolischen Geraden liegen.
Wie oben erwähnt, kann man sich die hyperbolische Ebene in diesem Modell als inhomogenes Medium mit Dichteverteilung $f_{\mathbb{H}^2}$ vorstellen. Dies führt dazu, dass kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten Bereiche zu vermeiden versuchen in denen $f_{\mathbb{H}^2}$ groß ist. Im Fall der hyperbolischen Ebene lassen sich die kürzesten Kurven geometrisch schön beschreiben:

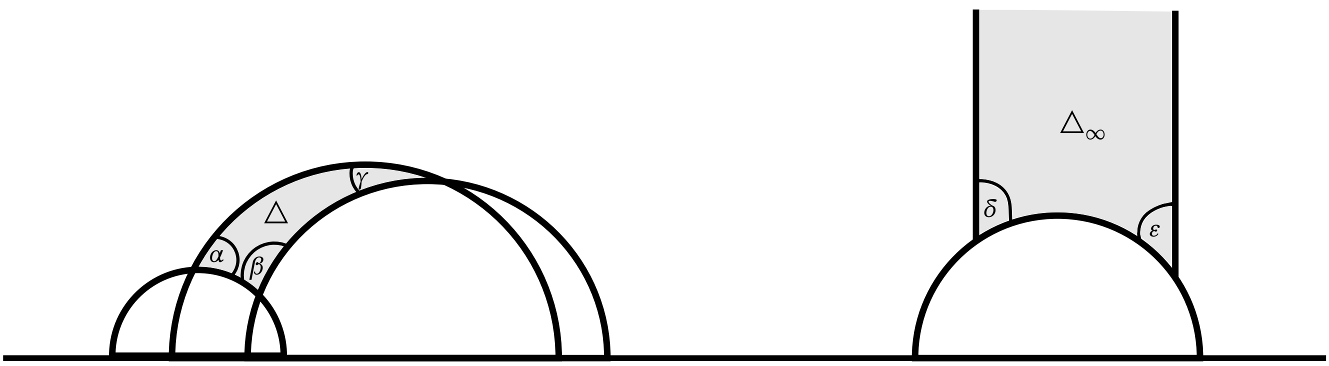
Satz (Charakterisierung hyperbolischer Geraden)**.** *Eine hyperbolische Gerade ist – als Punktmenge betrachtet – ein Euklidischer Halbkreis oder eine Euklidische Halbgerade, welche den Rand von $\mathbb{H}^2$ senkrecht trifft. Diese speziellen Halbgeraden nennen wir auch* vertikale hyperbolische Geraden*.*



hyperbolische Geraden

Als letzte Hausaufgabe wollen wir den Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks berechnen. Zunächst definieren wir, was ein hyperbolisches Dreieck ist.

Definition (Hyperbolische Dreiecke)**.** Gegeben seien drei Punkte in $\mathbb{H}^2$, welche nicht auf einer hyperbolischen Geraden liegen. Die kürzesten Verbindungen zwischen diesen Punkten berandeten ein Gebiet $\triangle$, welches wir als (nicht-entartetes) *hyperbolisches Dreieck* bezeichnen.
Ein *entartetes* hyperbolisches Dreieck ist ein Dreieck mit einem Punkt in unendlich; wir notieren das berandete Gebiet durch $\triangle_\infty$.



nicht-entartetes hyperbolisches Dreieck

entartetes hyperbolisches Dreieck

Das Schöne an hyperbolischen Dreiecken ist, dass die Innenwinkel Euklidisch gemessen den gleichen Wert ergeben (siehe Bild). Erstaunlicher ist, dass der Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks (entartet oder nicht-entartet) alleine durch die Innenwinkel bestimmt werden kann. Letzteres wollen wir in der finalen Hausaufgabe beweisen.

Aufgabe H3 (Zusatz (schön, nicht schwierig): Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks) (1 Punkt)
In dieser Aufgabe berechnen wir den Flächeninhalt von hyperbolischen Dreiecken über die Innenwinkel.

(a) Sei $\triangle_\infty$ ein entartetes hyperbolisches Dreieck mit Innenwinkeln δ und ε. Zeigen Sie

$$\nu_{\mathbb{H}^2}(\triangle_\infty) = \pi - \delta - \varepsilon.$$

Hinweis: Sei $R > 0$ der Radius des Halbkreises um den Punkt $(x_0, 0)$. Betrachten Sie dann die Abbildung

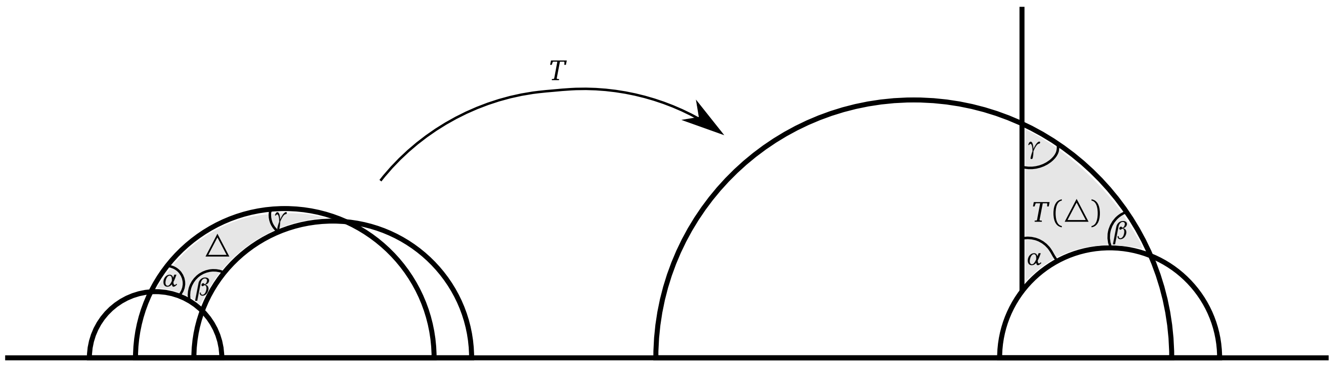
$$\Phi\colon]\varepsilon, \pi - \delta[\times]0, \infty[\to \mathbb{H}^2, \qquad \Phi(\varphi, y) := (R\cos(\varphi) + x_0, R\sin(\varphi) + y).$$

Was ist das Bild von Φ?

(b) Sei $\triangle$ ein nicht-entartetes hyperbolisches Dreieck mit Innenwinkeln α, β und γ. Zeigen Sie

$$\nu_{\mathbb{H}^2}(\triangle) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Hinweis: Sie dürfen hier zwei Dinge benutzen: 1. Hyperbolische Bewegungen sind winkelerhaltend. 2. Es gibt eine hyperbolische Bewegung T derart, dass $T(\triangle)$ ein Stück einer vertikalen hyperbolischen Geraden enthält.
Berechnen Sie schließlich $\nu_{\mathbb{H}^2}(T(\triangle))$ mit Hilfe von (a).



Bemerkung. Diese Aufgabe zeigt auch, dass die Innenwinkelsumme in einem hyperbolischen Dreieick immer echt kleiner π ist.