Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
11. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vržina

SS 2012
27. Juni bis 2. Juli 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Prinzip von Cavalieri)
Cavalieri formuliert 1635 folgendes Prinzip, welches wir hier frei übersetzt von J. Elstrodt zitieren:

> *Ebene Figuren bzw. räumliche Körper stehen (dem Maße nach) in demselben Verhältnis wie in gleicher Höhe zwischen beiden geführte gerade bzw. ebene Schnitte.*

Machen Sie sich klar, dass wir maßtheoretisch folgende Variante erhalten:
Cavalierisches Prinzip. *Gegeben seien σ-endliche Maßräume $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \nu)$ und es seien $A, B \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ mit $\nu(A_x) = \nu(B_x)$ für fast alle $x \in \Omega_1$. Dann gilt*

$$(\mu \otimes \nu)(A) = \int_{\Omega_1} \nu(A_x)\, d\mu(x) = \int_{\Omega_1} \nu(B_x)\, d\mu(x) = (\mu \otimes \nu)(B).$$

Aufgabe G2 (Volumen von Rotationskörpern)
Es sei $f : [a, b] \to [0, \infty[$ stetig und

$$K := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b] \text{ und } y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\right\}.$$

Die Menge K entsteht also durch Rotation der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$ um die x-Achse.
Zeigen Sie: Die Menge K ist Borel-messbar und es gilt

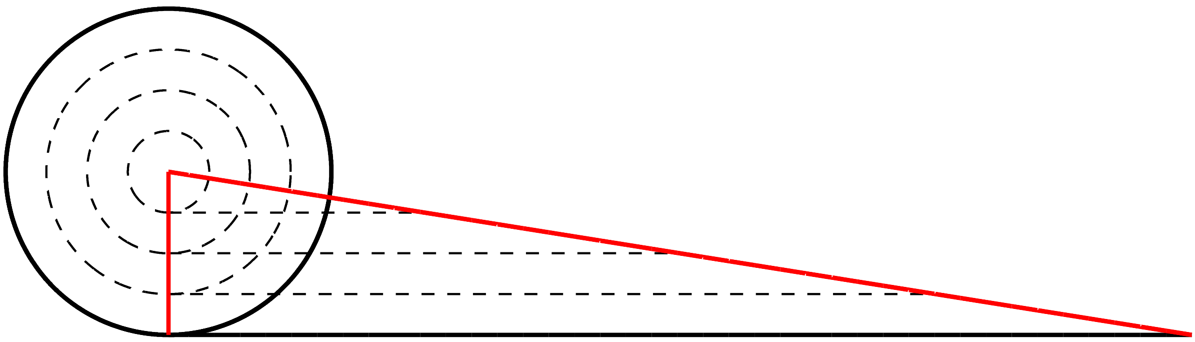
$$\lambda^3(K) = \pi \int_{[a,b]} (f(x))^2\, d\lambda(x).$$

Bemerkung. Es reicht hier zu fordern, dass f Borel-messbar ist. Es ist dann ein wenig komplizierter die Borel-Messbarkeit von K nachzuweisen, aber ansonsten ändert sich nichts.

Aufgabe G3 (Satz von Fubini-Tonelli)
Nehmen Sie Stellung zu folgender Argumentation:
Wir betrachten die Maßräume $([0, 1], \mathscr{B}([0, 1]), \lambda)$ und $([0, 1], \mathscr{B}([0, 1]), \mu)$, wobei μ das Zählmaß bezeichnet. Auf $[0, 1] \times [0, 1]$ induziert dies das Produktmaß $\lambda \otimes \mu$. Ferner sei $\Delta := \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ die *Diagonale* in $[0, 1] \times [0, 1]$. Offenbar ist $\Delta \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. Also ist χ_Δ eine nicht-negative messbare Funktion und nach Abschnitt 5.6 aus der Vorlesung gilt

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x, y)\, d\lambda(x) \right) d\mu(y) = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x, y)\, d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$

Aufgabe G4 (Flächeninhalt des Kreises nach Kepler)
Bei Kepler findet man folgende Skizze:



Dabei möchte er den Flächeninhalt eines Kreises vom Radius $R > 0$ berechnen. Dazu rollt er alle Kreislinien von Radius $r \in [0, R]$ ab (gestrichelte Linien) und erhält ein Dreieck. Die Behauptung ist nun, dass der Kreis und das Dreieck den gleichen Flächeninhalt haben. Liegt Kepler richtig? Kann man dies gegebenenfalls auch mathematisch begründen?

Aufgabe G5 (Ein Grenzwert für die Hausübung)
Zeigen Sie: Für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ gilt

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x+t) - f(x) \right| \, d\lambda(x) = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass die stetigen Funktionen mit kompakten Träger dicht in $L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ bezüglich $\|\cdot\|_1$ liegen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Satz von Fubini-Tonelli für integrierbare Funktionen) (1 Punkt)

In Abschnitt 5.6 der Vorlesung haben wir den Satz von Fubini-Tonelli für nicht-negative messbare Funktionen formuliert und bewiesen. In dieser Aufgabe werden wir diesen Satz auch für geeignete integrierbare Funktionen beweisen.

Gegeben seien dazu σ-endliche Maßräume $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \nu)$ und eine $\mu\otimes\nu$-integrierbare Funktion $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{K}}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Funktion $f_x = f(x, \cdot)$ ist ν-integrierbar für μ-fast alle $x \in \Omega_1$ und die Funktion $f^y = f(\cdot, y)$ ist μ-integrierbar für ν-fast alle $y \in \Omega_2$.
Hinweis: Betrachten Sie die Schnittintegrale $s_{|f|}$ und $s^{|f|}$.

(b) Für alle $g \in \{\mathrm{Re}(f)^\pm, \mathrm{Im}(f)^\pm\}$ ist

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} g(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} g(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty.$$

(c) Folgern Sie unter Benutzung von (a) und (b):

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\, d\mu\otimes\nu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

(d) Ist $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \to \overline{\mathbb{K}}$ messbar und ist eines der Integrale

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f|\, d\mu\otimes\nu, \quad \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

endlich, so sind alle Integrale endlich und gleich. Weiter ist f dann $\mu\otimes\nu$-integrierbar und (c) gilt.

Aufgabe H2 (Produktmaß und Integral) (1 Punkt)

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Für eine Funktion $f : \Omega \to [0,\infty]$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{O}(f) := \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \le t < f(x)\}$$

die *Ordinatenmenge von f* und für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, f(x)) \in \Omega \times \mathbb{R} : x \in \Omega\}$$

Graph von f. Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir hier ausschließlich das Lebesgue-Maß und von nun an sei μ ein σ-endliches Maß. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es ist $f : (\Omega, \Sigma) \to [0,\infty]$ messbar genau dann, wenn $\mathcal{O}(f)$ in $\Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ liegt.
Hinweis: Ist f messbar, so ist $g : (\Omega\times\mathbb{R}, \Sigma\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$, $g(x,t) := f(x) - t$ messbar. Für die andere Richtung betrachten Sie Schnitte.

(b) Für alle nicht-negativen messbaren Abbildungen $f : (\Omega, \Sigma) \to [0,\infty]$ gilt

$$(\mu\otimes\lambda)(\mathcal{O}(f)) = \int_\Omega f\, d\mu.$$

(c) Ist $f : (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar, so ist $\mathcal{G}(f) \in \Sigma\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und es gilt $(\mu\otimes\lambda)(\mathcal{G}(f)) = 0$.
Hinweis: Betrachten Sie g wie im Hinweis zu (a).

(d) Sei $f : (\Omega, \Sigma) \to [0,\infty]$ messbar sowie $F(t) := \mu\left(\{x \in \Omega : f(x) > t\}\right)$ für $t > 0$ die Verteilungsfunktion aus Aufgabe H2 von Übungsblatt 10. Dann gilt:

$$\int_\Omega f^p\, d\mu = \int_{]0,\infty[} p \cdot t^{p-1} F(t)\, d\lambda(t), \qquad p > 0.$$

Hinweis: Wenden Sie (b) an und überlegen Sie sich, dass man Cavalieri hier in zwei Varianten benutzen kann.

Faltung auf $L^1(\mathbb{R})$ und Fourier-Transformation

In Aufgabe H3 auf Übungsblatt 10 haben wir die Faltung einer glatten Funktion mit kompakten Träger und einer Funktion in $L^1(\mathbb{R})$ definiert. Wir definieren dies nun ganz naiv auch für zwei L^1-Funktionen.

Definition (Faltung)**.** Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Wir nennen

$$f * g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{K}}, \qquad (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, d\lambda(y)$$

Faltung von f und g.

Es ist a priori nicht klar, dass das Integral überhaupt existiert – dies zu zeigen ist Teil von Aufgabe H3. Weiter betrachten wir die Fourier-Transformierte einer Funktion in $L^1(\mathbb{R})$, welche in Mathematik und Technik ein wichtiges Hilfsmittel ist.

Definition (Fourier-Transformierte)**.** Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ heißt

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{K}}, \qquad \hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega x) f(x)\, d\lambda(x)$$

die *Fourier-Transformierte* von f.

Hier ist die Existenz des Integrals auf der rechten Seite klar (warum?). Dabei haben wir im Gegensatz zur Vorlesung den Normierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ weggelassen, damit wir in Aufgabe H3 (c) eine schönere Formel erhalten. Dies macht aber keinen wesentlichen Unterschied.

Aufgabe H3 (Zusatzaufgabe: Faltung und Fourier-Transformierte) (1 Punkt)
Gegeben seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten.

(a) Die Faltung $f * g$ ist in $L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

(b) Die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ ist stetig mit $\left|\hat{f}\right| \leq \|f\|_1$ und $\lim_{|t|\to\infty} \hat{f}(t) = 0$

(c) Es gilt $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(d) Ist $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot f$ auch in $L^1(\mathbb{R})$, so ist $\hat{f}$ differenzierbar mit $\frac{d}{d\omega}\hat{f} = -i\,\widehat{\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot f\right)}$.

Werbung