Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vržina

SS 2012
20. bis 25. Juni 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zum Warmwerden: L^p-Räume)
Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ repräsentiere eine Klasse $[f]$ in $L^p(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Was ist auf der Klasse $[f]$ wohldefiniert? Kreuzen Sie an.

- ☐ $f(0)$
- ☐ $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$
- ☐ $\{x\in\mathbb{R}: |f(x)|>0\}$
- ☐ $\lambda(\{x\in\mathbb{R}: |f(x)|>0\})$
- ☐ $[|f|]\in L^p(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$
- ☐ $[1/f]\in L^p(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$

Aufgabe G2 ($L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ als Hilbertraum)
Gegeben sei ein Maßraum (Ω,Σ,μ). Wir betrachten die Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{L}^2}\colon \mathscr{L}^2(\Omega,\Sigma,\mu)\times\mathscr{L}^2(\Omega,\Sigma,\mu)\to\mathbb{C},\qquad \langle f,g\rangle_{\mathscr{L}^2}:=\int_\Omega f\cdot\overline{g}\,d\mu.$$

(a) Warum ist $|\langle f,g\rangle_{\mathscr{L}^2}|<\infty$?

(b) Machen Sie sich klar (oder zeigen Sie), dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{L}^2}$ folgende Eigenschaften erfüllt.

(i) Für alle $f,g,h\in\mathscr{L}^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ ist

$$\langle f+g,h\rangle_{\mathscr{L}^2}=\langle f,h\rangle_{\mathscr{L}^2}+\langle g,h\rangle_{\mathscr{L}^2}\qquad\text{und}\qquad\langle f,g+h\rangle_{\mathscr{L}^2}=\langle f,g\rangle_{\mathscr{L}^2}+\langle f,h\rangle_{\mathscr{L}^2}.$$

(ii) Für alle $f,g\in\mathscr{L}^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ und alle $\lambda\in\mathbb{C}$ ist $\langle\lambda f,g\rangle_{\mathscr{L}^2}=\lambda\langle f,g\rangle_{\mathscr{L}^2}$.

(iii) Für alle $f,g\in\mathscr{L}^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ gilt $\langle f,g\rangle_{\mathscr{L}^2}=\overline{\langle g,f\rangle_{\mathscr{L}^2}}$.

(iv) Für $f\in\mathscr{L}^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ ist $\langle f,f\rangle_{\mathscr{L}^2}=\|f\|_2^2\geq 0$.

(c) Auf $\mathscr{L}^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{L}^2}$ kein Skalarprodukt, weil $\langle f,f\rangle_{\mathscr{L}^2}=0$ nicht nur für $f=0$ erfüllt ist. Durch Übergang zu $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ erhält man diese Eigenschaft, wenn man $\langle[f],[g]\rangle_{L^2}:=\langle f,g\rangle_{\mathscr{L}^2}$ setzt. Ist letzteres wohldefiniert?

Bemerkung. Ein Banachraum $(\mathscr{H},\|\cdot\|)$ heißt *Hilbertraum*, wenn es ein Skalarprodukt auf $\mathscr{H}$ derart gibt, dass $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$ für alle $x\in\mathscr{H}$ gilt. Also ist $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ ein Hilbertraum.

Aufgabe G3 (Konvergenz in L^p-Räumen I)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge integrierbarer Funktionen, die punktweise fast überall gegen eine integrierbare Funktion f in $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ konvergiert.

Zeigen Sie: Es ist $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 = 0$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_1 = \|f\|_1$.

Hinweis: Für die interessante Richtung in dieser Äquivalenz betrachten Sie die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $g_n := |f| + |f_n| - |f - f_n|$ mit $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise fast überall? Welchen Konvergenzsatz können Sie hier anwenden?

Aufgabe G4 (Differentiation unter dem Integral)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F \colon \Omega \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In dieser Aufgabe werden wir sehen, dass unter gewissen Voraussetzungen an F folgende Vertauschung von Differentiation und Integration gilt:

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\int_\Omega F(x,u)\,d\mu(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial u_j}F(x,u)\,d\mu(x).$$

Nehmen Sie nun an, dass F folgende Eigenschaften erfüllt.

(a) Für jedes $u \in U$ gehören die Funktionen $F_u \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x,u)$ zu $\mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

(b) Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Für jedes $x \in \Omega$ sei für die Funktion $F_x \colon U \to \mathbb{R}$, $u \mapsto F(x,u)$ die partielle Ableitung $\partial_j(F_x)$ existent und stetig und es gibt ein $h \in \mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit

$$\left|\partial_j F_x(u)\right| \le h(x) \qquad \text{für alle } (x,u) \in \Omega \times U.$$

Weiter sei

$$g \colon U \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto \int_\Omega F_u\,d\mu = \int_\Omega F(x,u)\,d\mu(x).$$

Zeigen Sie: Es existiert $\partial_j g$, diese Funktion ist stetig, und für alle $p \in U$ ist

$$\left(\partial_j g\right)(p) = \int_\Omega \partial_j F(x,p)\,d\mu(x).$$

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{F(x,u+te_j)-F(x,u)}{t}$ für $t \in \mathbb{R}$ mit $u + \mu t e_j \in U$ für alle $\mu \in [0,1]$. Was sagt Ihnen der Mittelwertsatz in dieser Situation?

Aufgabe G5 (Produkt-σ-Algebra)
Zeigen Sie $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathscr{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$.

Hinweis: Jeder Schnitt in $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ ist Lebesgue-messbar.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvergenz in L^p-Räumen II) (1 Punkt)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_p < \infty$. Zeigen Sie, dass es ein F in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ gibt, so dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ fast überall gegen F konvergiert und dass gilt

$$\lim_{N\to\infty}\left\|F - \sum_{n=0}^{N} f_n\right\|_p = 0.$$

Hinweis: Schauen Sie sich den Beweis zur Vollständigkeit von $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ an.

Aufgabe H2 (Verteilungsfunktion und p-Integrierbarkeit) (1 Punkt)

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und $f : \Omega \to \mathbb{K}$ eine messbare Funktion. Wir definieren

$$F :]0, \infty[\to [0, \infty], \qquad F(t) := \mu\left(\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}\right).$$

(a) Beweisen Sie: Ist $\|f\|_p < \infty$ für ein $p \in [1, \infty[$, dann gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $F(t) \le C \cdot t^{-p}$ für alle $t > 0$.

(b) Zeigen Sie: Es ist $\|f\|_1 < \infty$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} F(n) < \infty$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\sum_{n=1}^{\infty} n[F(n) - F(n+1)] < \int_{\{|f|>1\}} |f| \, d\mu \le \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)[F(n) - F(n+1)].$$

(c) Ist f in $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, so gilt $\lim_{t\to\infty}(t \cdot F(t)) = 0$.
Hinweis: Für f ist $\nu_{|f|}$ absolutstetig bezüglich μ (siehe Aufgaben G2 und H2 auf Übungsblatt 8).

Aufgabe H3 (Faltung) (1 Punkt)

Sei $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ eine glatte Funktion mit kompakten Träger und $\int_{\mathbb{R}} \Phi \, d\lambda = 1$.

Zur Erinnerung: Eine Funktion heißt glatt, wenn $\frac{d^k}{dx^k}\Phi$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert. Wir sagen Φ hat kompakten Träger, wenn es ein $R > 0$ gibt mit $\Phi(x) = 0$ für $|x| > R$.

Für f in $L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ betrachten wir die Funktion

$$\Phi * f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (\Phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y) f(y) \, d\lambda(y).$$

Man nennt $\Phi * f$ auch *Faltung von Φ mit f*.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi * f$ glatt ist. In diesem Sinne kann man die Faltung auch als Glättung verstehen.

(b) Sei nun f zusätzlich stetig und für $\delta > 0$ betrachten wir $\Phi_\delta(t) := \frac{1}{\delta}\Phi\left(\frac{t}{\delta}\right)$. Zeigen Sie

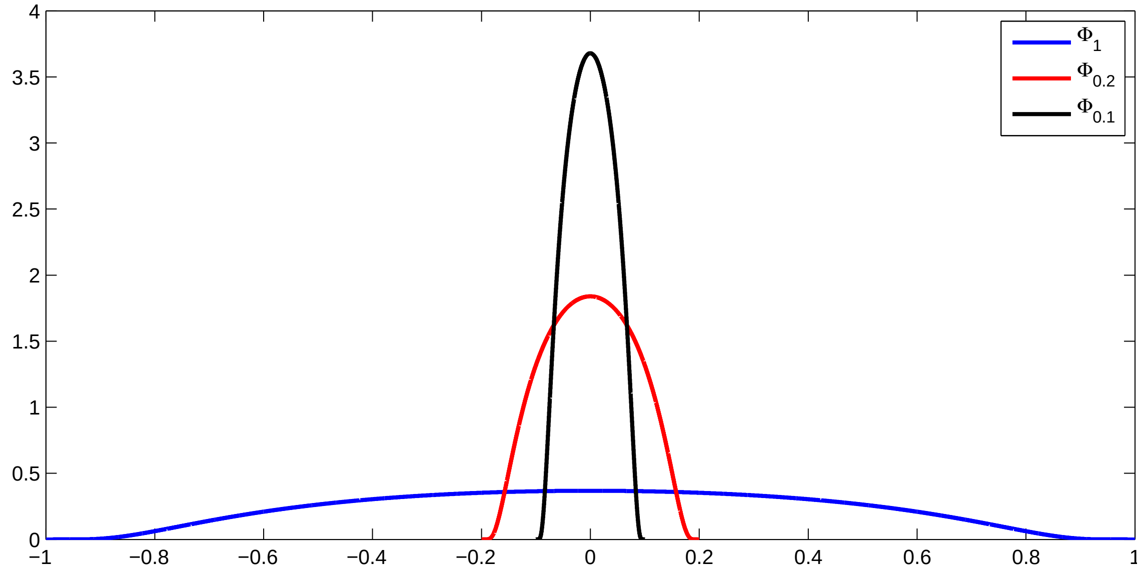
$$\lim_{\delta\to 0} (\Phi_\delta * f)(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Gilt diese Behauptung auch für f in $L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$?

Bemerkung. Es ist instruktiv sich Φ und Φ_δ an einem Beispiel anzuschauen. Die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{falls } x \in]-1, 1[\\ 0 & \text{falls } |x| \ge 1 \end{cases},$$

ist glatt und hat kompakten Träger (durch geeignete Skalierung erhält man auch $\int_{\mathbb{R}} \Phi \, d\lambda = 1$). Den Grenzwert von Φ_δ für $\delta \to 0$ richtig aufzufassen ist Gegenstand der Funktionalanalysis und führt aus der Klasse der Funktionen heraus.



Erinnerung: Riemann-Integral

Das Riemann-Integral wird auch durch Stufenfunktionen approximiert, aber durch spezielle Stufenfunktionen, welche von einer Zerlegung des Definitionsbereiches ausgehen.

Definition. Wir nennen eine Funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-Stufenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ von $[a,b]$ gibt, so dass φ konstant ist auf jedem Intervall $]x_{k-1}, x_k[$ für $k \in \{1,\ldots,n\}$. Sei $\mathscr{S}[a,b]$ die Menge all dieser Funktionen.

Offenbar ist $\mathscr{S}[a,b]$ eine Teilmenge der einfachen Funktionen und wir setzen (wie beim Lebesgue-Integral)

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}),$$

wobei $\varphi(x) = c_k$ für $x \in]x_{k-1}, x_k[$.

Definition. Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn das Oberintegral

$$O := \inf\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx \colon \varphi \in \mathscr{S}[a,b] \text{ mit } \varphi \geq f\right\}$$

und das Unterintegral

$$U := \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx \colon \varphi \in \mathscr{S}[a,b] \text{ mit } \varphi \leq f\right\}$$

den gleichen Wert ergeben. Wir schreiben dann $\int_a^b f(x)\,dx := O = U$ und nennen dies *Riemann-Integral* von f.

Aufgabe H4 (Zusatzaufgabe: Riemann- und Lebesgue-Integral) (1 Punkt)

(a) Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz. *Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar bezüglich des Lebesgue-Maßes λ und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda,$$

d.h. das Riemann-Integral und das Lebesgue-Integral ergeben den gleichen Wert.

(b) Betrachten Sie nun die Abbildung

$$T\colon \left(\mathscr{C}_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

d.h. T ordnet einer stetigen Funktion mit kompakten Träger ihr Riemann-Integral zu.

Zeigen Sie, dass T eine stetige lineare Abbildung ist und eine eindeutige Fortsetzung zu einer stetigen linearen Abbildung $\widetilde{T}\colon \left(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right) \to \mathbb{R}$ besitzt mit $\widetilde{T}|_{\mathscr{C}_c(\mathbb{R})} = T$. Können Sie $\widetilde{T}$ konkret beschreiben?