Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vržina

SS 2012
13. bis 18. Juni 2012

Wiederholung I: L^p-Räume

Auf einem Maßraum (Ω, Σ, μ) und für $p \in [1, \infty[$ betrachten wir die Menge

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \;\middle|\; \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

Die Ungleichung von Minkowski zeigt, dass

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu),$$

eine Halbnorm auf $\mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ definiert; insbesondere ist $\mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein Vektorraum. Um einen normierten Raum zu erhalten, wird $\mathscr{N} := \{f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) : \|f\|_p = 0\}$ betrachtet. Dann induziert $\|\cdot\|_p$ auf dem Quotientenraum $L^p(\Omega, \Sigma, \mu) := \mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)/\mathscr{N}$ eine Norm, die wir wieder mit $\|\cdot\|_p$ bezeichnen. In Aufgabe G1 dürfen Sie diesen Sachverhalt in allgemeineren Kontext beweisen.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Halbnorm und Quotientenraum)
Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf E. Betrachten Sie nun $N := \{x \in E : \|x\| = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass N ein Untervektorraum von E ist.

(b) Zeigen Sie, dass auf E/N durch

$$\|x + N\|_0 := \|x\|, \qquad x \in E,$$

eine wohldefinierte Norm gegeben ist.

Aufgabe G2 (Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel)
Es sei (Ω, Σ, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie, dass $\exp\left(\int_\Omega \log \circ f \, d\mu\right) \leq \int_\Omega f \, d\mu$ für jede nicht-negative integrierbare Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ gilt.

(b) Für eine positive natürliche Zahl n betrachten wir $\Omega := \{1, \ldots, n\}$ und $\mu(\{j\}) = \frac{1}{n}$ für $j \in \Omega$. Für eine Funktion $f : \Omega \to [0, \infty[$ sei $x_j := f(j)$ für $j \in \Omega$. Was können Sie dann aus (a) folgern?

Intermezzo: Berechnung von Lebesgue-Integralen

Es bestehen folgende Zusammenhänge zwischen dem Riemann-Integral und Lebesgue-Integral.

(a) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar bezüglich des Lebesgue-Maßes λ und die Integrale ergeben den gleichen Wert.

(b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar über jedem kompakten Teilintervall von I. Ist $|f|$ über I uneigentlich Riemann-integrierbar, so ist f auch Lebesgue-integrierbar über I bezüglich λ und die Werte der beiden Integrale stimmen überein.

Aufgabe G3 (Konkrete Integrale)
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$f_\alpha : [1,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_\alpha(x) := x^\alpha$$

sowie

$$g_\alpha :]0,1[\to \mathbb{R}, \qquad g_\alpha(x) := x^\alpha.$$

(a) Für welche α in $\mathbb{R}$ ist f_α in $\mathscr{L}^p([1,\infty[,\lambda)$, wobei $p \in [1,\infty[$? Gibt es hier einen Zusammenhang zwischen der p-Integierbarkeit von f_α und der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p}$?

(b) Für welche $p \in [1,\infty[$ liegt g_α in $\mathscr{L}^p(]0,1[,\lambda)$?

Aufgabe G4 (Allgemeine Transformationsformel)
Sei (Ω,Σ,μ) ein Maßraum und (Ω',Σ') ein messbarer Raum sowie $T : \Omega \to \Omega'$ eine messbare Abbildung.
Zeigen Sie: Für alle nicht-negativen messbaren Funktionen $f : \Omega' \to \mathbb{K}$ gilt

$$\int_{\Omega'} f \, d(T(\mu)) = \int_{\Omega} (f \circ T) \, d\mu. \tag{1}$$

Ferner ist $f \in \mathscr{L}^p(\Omega',\Sigma',T(\mu))$ genau dann, wenn $f \circ T \in \mathscr{L}^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ und es gilt (1).
Hinweis: Zeigen Sie (1) zunächst für charakteristische Funktionen (und damit für einfache Funktionen). Wie kann man f durch einfache Funktionen approximieren?

Aufgabe G5 (Verhalten Lebesgue-integrierbarer Funktionen im Unendlichen)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = \lim_{n\to\infty} f(x-n) = 0$$

für fast alle x in $\mathbb{R}$ gilt.
Bemerkung. Bezeichnet μ das Zählmaß auf $\mathscr{P}(\mathbb{Z})$, so gilt für jede Funktion f in $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z},\mathscr{P}(\mathbb{Z}),\mu)$, dass $\int_Z f \, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)$ endlich ist. Also konvergieren die Reihen $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(-k)$. Für $k \in \mathbb{Z}$ ist demnach $\lim_{n\to\infty} f(k+n) = \lim_{n\to\infty} f(k-n) = 0$ (siehe Analysis I).

Hausübung

Aufgabe H1 (Umkehrung der Jensenschen Ungleichung) (1 Punkt)
Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ konvex und $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für jede beschränkte messbare Funktion $f\colon [0,1] \to J$ gilt

$$\varphi\left(\int_{[0,1]} f\, d\lambda\right) \leq \int_{[0,1]} \varphi \circ f\, d\lambda.$$

Beweisen Sie, dass φ eine konvexe Funktion ist.
Hinweis: Sie dürfen $\int_{[0,1]} \varphi \circ f\, d\lambda = \int_J \varphi\, d\big(f(\lambda)\big)$ benutzen (siehe Aufgabe G4).

Aufgabe H2 (Eigenschaften von L^p-Räumen) (1+1 Punkte)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Ferner betrachten wir die Menge $I(f) := \{p \in [1,\infty[\colon \|f\|_p < \infty\}$.

(a) Beweisen Sie: Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so folgt aus $1 < q$ stets $L^q(\Omega,\Sigma,\mu) \subseteq L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. Was ist, wenn Ω kein endliches Maß hat?

(b) Seien $r, s \in I(f)$ mit $r < s$. Zeigen Sie $]r,s[\subseteq I(f)$.
Hinweis: Ist $p \in]r,s[$, so können Sie p als Konvexkombination von r und s schreiben und benutzen Sie dann die Hölder-Ungleichung.

(c) Kann $I(f) =]a,b[$ für $a, b \in [1,\infty[$ mit $a < b$ sein? Finden Sie gegebenenfalls ein Beispiel.

(d*) Für f definieren wir das *wesentliche Supremum* durch

$$\|f\|_\infty := \inf\{C > 0\colon |f| \leq C \text{ fast überall}\}.$$

Beweisen Sie: Für $\mu(\Omega) < \infty$ gilt $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$. Was ist im Fall $\mu(\Omega) = \infty$?

Wiederholung II: Maßerhaltende Abbildungen und Ergodizität

Sei (Ω, Σ, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eigenschaften von (Ω, Σ, μ) lassen sich auch über Funktionen in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ studieren. Zum Beispiel ist χ_B genau dann messbar, wenn B in Σ liegt.

In den folgenden Aufgaben werden wir sehen, dass man für eine messbare Abbildung $T\colon \Omega \to \Omega$ (nicht notwendig maßerhaltend) auch über den Operator

$$U_T\colon L^p(\Omega,\Sigma,\mu) \to L^p(\Omega,\Sigma,\mu), \qquad f \mapsto f \circ T$$

Eigenschaften von T charakterisieren kann (die Inklusion $U_T(L^p(\Omega,\Sigma,\mu)) \subseteq L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ ist begründet durch Aufgabe G4). Genauer werden wir hier maßerhaltende und ergodische Abbildungen über U_T charakterisieren. An dieser Stelle erinnern wir an die Definition von Ergodizität:

Definition (Ergodizität)**.** Sei (Ω, Σ, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine maßerhaltende Abbildung T von (Ω, Σ, μ) heißt *ergodisch*, wenn für jedes $B \in \Sigma$ mit $T^{-1}(B) = B$ entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = 1$ gilt.

Aufgabe H3 (Charakterisierung von Maßerhaltung und Ergodizität über U_T) (1 Punkt)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T\colon (\Omega,\Sigma,\mu) \to (\Omega,\Sigma,\mu)$ eine messbare Abbildung. Ferner sei $p \in [1,\infty[$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Abbildung T ist maßerhaltend genau dann, wenn $\|U_T(f)\|_p = \|f\|_p$ für alle $f \in L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ gilt.

(b) Die Abbildung T ist ergodisch genau dann, wenn $U_T(f) = f$ mit $f \in L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ nur für fast überall konstante Funktionen erfüllt ist.

Aufgabe H4 (Ergodizität der Drehung auf dem Torus) (1 Punkt)
Auf dem Torus $\mathbb{T} := \{e^{i2\pi t} : t \in \mathbb{R}\}$ definieren wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{T})$ durch

$$\mu\left(\{e^{i2\pi t} : a < t \leq b\}\right) = b - a, \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < a - b \leq 1.$$

Sie können sich klarmachen, dass dies ein Maß definiert.

Für ϑ in $\mathbb{R}$ betrachten wir die Abbildung

$$R_\vartheta : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \quad z \mapsto e^{i2\pi\vartheta} \cdot z,$$

d.h. R_ϑ beschreibt eine Drehung.

(a) Zeigen Sie, dass R_ϑ eine maßerhaltende Abbildung ist.

(b) Beweisen Sie, dass R_ϑ genau dann ergodisch ist, wenn ϑ irrational ist.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass es zu einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{T})$ eine Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ gibt, die in der $\|\cdot\|_2$-Norm gegen f konvergiert, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$ ist. Dies bedeutet, dass $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ fast überall in $L^2(\mathbb{T})$ gilt.