Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
8. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vržina

SS 2012
6. bis 11. Juni 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Fast überall bestehende Eigenschaften I)
In der Maß- und Integrationstheorie kann man Funktionen auf Nullmengen nahezu beliebig abändern. Daher hat sich folgender – von Lebesgue eingeführter – Begriff als nützlich erwiesen:
Definition. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und eine Eigenschaft E sei für alle $x \in \Omega$ sinnvoll. Man sagt, die Eigenschaft E gilt μ-fast überall (kurz μ-f.ü.), wenn es eine Nullmenge $N \in \Sigma$ gibt, so dass die Eigenschaft E für jedes x in $\Omega \setminus N$ erfüllt ist. Wenn klar ist, welches Maß gemeint ist, so schreibt man auch nur *fast überall* (kurz f.ü.).

Überlegen Sie sich, bei welchen Sätzen über das Lebesgue-Integral (z.B. Monotonie des Integrals, Satz von Beppo Levi, Satz von der majorisierten Konvergenz, etc.) Sie auf ganz Ω gültige Eigenschaften durch lediglich fast überall wahre Eigenschaften ersetzen können. (Maximal 10 Minuten)

Aufgabe G2 (Maße mit Dichten)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\nu_f : \Sigma \to \mathbb{R}, \quad \nu_f(A) := \int_A f(x)\, d\mu(x)$$

ein Maß auf (Ω, Σ) definiert.
Bemerkung. Man nennt ν_f das *Maß mit der Dichte f bezüglich μ* und schreibt symbolisch $d\nu_f = f\, d\mu$.

Aufgabe G3 (Borel-Cantelli Lemma)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Σ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$. Zeigen Sie mit dem Satz von Beppo Levi, dass die Menge aller Punkte, die in unendlich vielen von den Mengen A_n enthalten sind, das Maß 0 hat. Alternative Beweise, wie man sie vielleicht aus der Einführung in die Stochastik (fast sicher nicht) oder Wahrscheinlichkeitstheorie kennt, sind hier nicht gestattet.

Hinweis: Realisieren Sie $N : \Omega \to [0, \infty]$, $N(x) := \left|\{k \in \mathbb{N} : x \in A_k\}\right|$ als punktweisen Limes einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe G4 (Fast überall bestehende Eigenschaften II)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeigen Sie:

Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist 0 fast überall genau dann, wenn gilt

$$\int_\Omega \left|f(x)\right|\, d\mu(x) = 0.$$

Hinweis: Wie kann man $A := \{x \in \Omega : |f(x)| > 0\}$ als Grenzwert einer monoton wachsenden Folge von Mengen schreiben?

Aufgabe G5 (Lemma von Fatou)
Zeigen Sie, dass die Ungleichung im Lemma von Fatou strikt sein kann. Finden Sie dazu, zum Beispiel, auf dem Maßraum $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), \lambda)$ eine Folge einfacher Funktionen, die punktweise gegen 0 konvergiert, aber das Integral über jeder dieser Funktionen ist 1.

Hinweis: Wie kann man den Flächeninhalt des Einheitsquadrats in $\mathbb{R}^2$ als Integral über eine einfache Funktion schreiben? Für die Folge betrachten Sie geeignet translatierte Einheitsquadrate.

Hausübung

Aufgabe H1 (Schranken) (1 Punkt)
Gegeben seien drei Folgen integrierbarer Funktionen g_n, h_n, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Maßraum (Ω, Σ, μ), die folgende Eigenschaften besitzen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $g_n \leq f_n \leq h_n$ fast überall.

(b) Die Folgen konvergieren fast überall gegen messbare Funktionen g, h und f.

(c) Die Funktionen g und h sind integrierbar mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n \, d\mu = \int_\Omega h \, d\mu \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f auch integrierbar ist und dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

Hinweis: Zeigen Sie mit dem Lemma von Fatou die Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Aufgabe H2 (Absolutstetigkeit des Maßes mit Dichte) (1 Punkt)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion mit $\int_\Omega f \, d\mu < \infty$.

Zeigen Sie, dass das Maß ν_f mit Dichte f in folgendem Sinne stetig ist: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $\nu_f(A) < \varepsilon$ für alle $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt.

Hinweis: Das Borel-Cantelli Lemma ist hier nützlich.

Bemerkung. Man sagt auch ν_f sei *absolutstetig bezüglich* μ und schreibt $\nu_f \ll \mu$. Man kann sich natürlich fragen, ob jedes absolutstetige Maß bezüglich μ ein Maß mit Dichtefunktion ist und der Satz von Radon-Nikodym beantwortet diese Frage affirmativ.

Gratwanderung zwischen Messbarkeitsbegriffen beim Lebesgue-Integral

In der Vorlesung haben wir stets messbare numerische Funktionen der Art $f : (\Omega, \Sigma) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$ betrachtet, d.h. wir haben auf $\overline{\mathbb{R}}$ die Borel-σ-Algebra gewählt. Auf dieser Grundlage haben wir das Lebesgue-Integral eingeführt und dieser Weg hat sich als fruchtbar erwiesen.

Warum haben wir auf $\overline{\mathbb{R}}$ aber nicht die Vervollständigung $\mathscr{L}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ der Borel-σ-Algebra genommen? Die Antwort darauf ist simpel: Diese Forderung wäre so restriktiv, dass wir nicht einmal alle stetigen Funktionen integrieren könnten!

Eine nicht Lebesgue-messbare, aber stetige, Funktion anzugeben ist das Hauptziel der folgenden beiden Aufgaben – auf diesem Weg erhalten wir noch andere schöne Resultate, die wir bislang nicht oder unvollständig bewiesen haben.

Aufgabe H3 (Die Teufelstreppe) (1 Punkt)
Wir betrachten die Abbildung

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad x\mapsto\begin{cases}0 & \text{für } x\le 0,\\ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_j}{2^{j+1}} & \text{für } x\in C,\\ \sup\{F(y)\colon y\in C \text{ mit } y\le x\} & \text{für } x\in[0,1]\setminus C,\\ 1 & \text{für } x\ge 1,\end{cases}$$

wobei $x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_j}{3^j}$ eine triadische Darstellung von x mit $x_j\in\{0,2\}$ für alle $j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist und C die Cantor-Menge bezeichnet. Der Name „Teufelstreppe" ist begründet durch folgende Eigenschaften von F, die Sie nachweisen sollen:

(a) F ist monoton wachsend („Treppe"),

(b) $F(C)=[0,1]$,

(c) F ist stetig.

Bemerkung. Die Teufelstreppe zeigt: Durch stetige Abbildungen müssen Nullmengen nicht auf Nullmengen abgebildet werden.

Aufgabe H4 (Ein instruktives Beispiel zur Messbarkeit von Funktionen) (1 Punkt)
Es bezeichne F die Teufelstreppe aus Aufgabe H3. Weiter sei $f:[0,1]\to[0,1]$, $x\mapsto\frac{1}{2}(x+F(x))$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Funktion f ist streng monoton wachsend und stetig. Die Umkehrfunktion $g:=f^{-1}$ ist somit eine stetige Selbstabbildung des Einheitsintervalles in sich.

(b) Die Menge $K:=g^{-1}(C)$ ist Borel-messbar mit $\lambda(K)=\frac{1}{2}$.

(c) Es gibt eine Lebesgue-messbare Menge $E\subseteq[0,1]$, so dass $g^{-1}(E)$ nicht messbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie ein Repräsentantensystem R der Quotientengruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Zeigen Sie mit dem Satz von Steinhaus (siehe Aufgabe H1 auf dem sechsten Übungsblatt), dass nicht alle Mengen der Form $K\cap(R+q)$ mit $q\in\mathbb{Q}$ in $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ liegen.

Bemerkung. Wir machen uns nochmal klar, was wir hier alles gezeigt haben:

1. Es gibt eine Lebesgue-messbare Menge, die nicht Borel-messbar ist. Dazu mussten wir nicht über die Mächtigkeiten von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ argumentieren (siehe auch Aufgabe H1 auf dem fünften Übungsblatt). Also ist $\mathscr{B}(\mathbb{R})\subsetneq\mathscr{L}(\mathbb{R})\subsetneq\mathscr{P}(\mathbb{R})$.
2. Als stetige Funktion ist g Lebesgue-Borel-messbar, aber sie ist nicht Lebesgue-Lebesgue-messbar.
3. Die Funktion f ist ein Homöomorphismus und bildet die Nullmenge C auf eine Menge mit positivem Maß ab. Man braucht also stärkere Bedingungen an f, damit Nullmengen auf Nullmengen abgebildet werden.