Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vržina

SS 2012
30. Mai bis 4. Juni 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Bildmaße I)
Seien $f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega', \Sigma')$ und $g : (\Omega', \Sigma') \to (\Omega'', \Sigma'')$ messbare Abbildungen und μ ein Maß auf (Ω, Σ). Zeigen Sie: $g \circ f$ ist messbar und $(g \circ f)(\mu) = g(f(\mu))$.

Aufgabe G2 (Bildmaße II)
Wir betrachten die Abbildung

$$s_\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad (x_1, \ldots, x_d)^\top \mapsto (\alpha \cdot x_1, x_2, \ldots, x_d)^\top, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Warum ist s_α Borel-messbar? Bestimmen Sie $s_\alpha(\lambda^d)([0,1]^d)$.

Aufgabe G3 (Maßerhaltende Abbildungen I)
Sei d eine positive natürliche Zahl, $\Omega_0 := \{1, \ldots, d\}$ und $\Omega := \prod_{k=0}^\infty \Omega_0$. Mit Σ bezeichnen wir die von den Zylindermengen erzeugte σ-Algebra auf Ω. Ferner betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ auf dem endlichen Produktraum $\Omega_n := \prod_{k=0}^n \Omega_0$ die σ-Algebra $\mathscr{P}_n := \mathscr{P}(\Omega_n)$. Siehe auch H3 auf Übungsblatt 4.

(a) Zeigen Sie, dass der *einseitige Shift*

$$S : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega, \Sigma), \quad (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

eine messbare Abbildung ist.

(b) Sei μ_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_0, \mathscr{P}(\Omega_0))$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathscr{P}_n$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_n durch

$$\mu_n(\{(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)\}) = \mu_0(\{\omega_0\}) \cdot \ldots \cdot \mu_0(\{\omega_n\}).$$

Zeigen Sie, dass $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist, d.h. jedes μ_n ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß und für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A \in \mathscr{P}_n$ gilt $\mu_{n+1}(A \times \Omega_0) = \mu_n(A)$.

(c) Nach dem Konsistenzsatz von Kolmogorov induziert die Familie $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω mit

$$\mu(Z_{I,J}) = \mu_0(\{j_1\}) \cdot \ldots \cdot \mu_0(\{j_r\}).$$

Zeigen Sie, dass $S : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (\Omega, \Sigma, \mu)$ maßerhaltend ist.

Bemerkung. Das 4-Tupel (Ω, Σ, μ, S) wird auch *Bernoulli-Shift* genannt. Bernoulli-Shifts sind das Paradigma für chaotische dynamische Systeme in der Mathematik, mit denen andere chaotische Systeme verglichen werden.

Aufgabe G4 (Direktes Bild)
Gegeben seien Mengen Ω und Ω' und sei Σ eine σ-Algebra auf Ω. Für eine Abbildung $f:\Omega\to\Omega'$ betrachten wir

$$f_*(\Sigma) := \{A'\subseteq\Omega' : f^{-1}(A')\in\Sigma\}.$$

Wir nennen $f_*(\Sigma)$ *direktes Bild* von Σ unter f. Nach Abschnitt 3.2 aus der Vorlesung ist $f_*(\Sigma)$ eine σ-Algebra.

(a) Sei nun Σ' eine σ-Algebra auf Ω'. Zeigen Sie: Die Abbildung $f:(\Omega,\Sigma)\to(\Omega',\Sigma')$ ist genau dann messbar, wenn Σ' im direkten Bild enthalten ist. In diesem Sinne ist das direkte Bild die größte σ-Algebra auf Ω', so dass f messbar ist.

(b) Betrachten Sie die Abbildung

$$f:(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))\to\mathbb{Z},\quad x\mapsto\lfloor x\rfloor := \max\{n\in\mathbb{Z}: n\le x\}$$

und bestimmen Sie das direkte Bild der Borel-σ-Algebra unter f.

(c) Betrachten Sie nun

$$g:(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))\to\mathbb{R},\quad x\mapsto|x|$$

und bestimmen Sie $g_*(\mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Aufgabe G5 (Messbarkeit und Vervollständigungen von Maßräumen)
Gegeben seien Maßräume (Ω,Σ,μ) und (Ω',Σ',μ') mit ihren Vervollständigungen $\left(\Omega,\widetilde{\Sigma},\tilde{\mu}\right)$ und $\left(\Omega',\widetilde{\Sigma}',\widetilde{\mu}'\right)$ sowie eine messbare Abbildung $f:(\Omega,\Sigma)\to(\Omega',\Sigma')$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Gilt für jede μ'-Nullmenge N' auch $\mu(f^{-1}(N'))=0$, so ist $f:\left(\Omega,\widetilde{\Sigma}\right)\to\left(\Omega',\widetilde{\Sigma}'\right)$ messbar.

(b) Ist $\mu'=f(\mu)$, so gilt $\widetilde{f(\mu)}=f(\tilde{\mu})$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Produkt-σ-Algebra) (1 Punkt)
In dieser Aufgabe soll der Satz aus Abschnitt 3.4 der Vorlesung bewiesen werden. Für $i \in I$ sei (Ω_i, Σ_i) ein Messraum, $\Omega := \prod_{i \in I} \Omega_i$ das kartesische Produkt und $\bigotimes_{i \in I} \Sigma_i$ die Produkt-σ-Algebra auf Ω. Für jedes $i \in I$ sei außerdem $\mathscr{E}_i$ ein Erzeuger für Σ_i. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Das System

$$\left\{ E_k \times \prod_{i \in I \setminus \{k\}} \Omega_i : k \in I \text{ und } E_k \in \mathscr{E}_k \right\}$$

ist ein Erzeuger von $\bigotimes_{i \in I} \Sigma_i$.

(b) Ist $I = \{1, \ldots, n\}$ endlich (n positive natürliche Zahl) und existiert für $i \in I$ eine Folge $(E_{i\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ in $\mathscr{E}_i$ mit $\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} E_{i\ell} = \Omega_i$, so ist

$$\mathscr{E} := \{E_1 \times \cdots \times E_n : E_i \in \mathscr{E}_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

ein Erzeuger für $\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n$.

Aufgabe H2 (Transformation des Lebesgue-Maßes unter linearen Abbildungen) (1 Punkt)
Sei g eine invertierbare $d \times d$-Matrix und $L_g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto g \cdot x$ die assoziierte lineare Abbildung. Wir betrachten hier als Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$ und durch Identifikation von g mit L_g schreiben wir auch $g(\lambda^d)$ für $L_g(\lambda^d)$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass für das Bildmaß $g(\lambda)$ folgende Transformationsformel gilt:

$$g(\lambda^d) = \frac{1}{\left|\det(g)\right|} \cdot \lambda^d.$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Konstante $c(g) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $g(\lambda) = c(g) \cdot \lambda$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$c : \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g \mapsto c(g)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Nach einem Satz ist jeder Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ von der Form $\varphi \circ \det$ mit einem Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie φ konkret für den Gruppenhomomorphismus c aus Aufgabenteil (a) und (b) und folgern Sie damit die Behauptung.

Aufgabe H3 (Maßerhaltende Abbildungen II) (1 Punkt)
Sei d eine positive natürliche Zahl, $\Omega_0 := \{1, \ldots, d\}$ und μ_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{P}(\Omega_0)$. Den Zeilenvektor $p := (\mu_0(\{1\}), \ldots, \mu_0(\{d\}))$ nennen wir auch *Wahrscheinlichkeitsvektor*. Sei ferner P eine $d \times d$-Matrix mit

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{und} \quad 1 = \sum_{j=1}^{d} p_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in \Omega_0.$$

Wir nennen P auch *stochastische Zeilenmatrix*.

(a) Zeigen Sie: Auf der von den Zylindermengen erzeugten σ-Algebra Σ auf $\Omega := \prod_{k=0}^{\infty} \Omega_0$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ, so dass für jedes $(r+1)$-Tupel $(j, j_1, \ldots, j_r) \in \Omega_r$ gilt:

$$\mu\left(\{\omega \in \Omega : \omega_0 = j, \omega_1 = j_1 \ldots, \omega_r = j_r\}\right) = p_j p_{j j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{r-1} j_r}.$$

(b) Zeigen Sie: Der einseitige Shift $S : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (\Omega, \Sigma, \mu)$ ist genau dann maßerhaltend, wenn $pP = p$ gilt.

Bemerkung. Das 4-Tupel (Ω, Σ, μ, S) in dieser Aufgabe ist auch als *Markov-Shift* bekannt.

Ergodizität – Ein mathematischer Zugang

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (X, Σ, μ) sei eine maßerhaltende Abbildung $T: (X, \mu) \to (X, \mu)$ gegeben. Gilt $T^{-1}B = B$ für $B \in \Sigma$, so ist auch $T^{-1}(B^c) = B^c$. Also könnte man T durch $T|_B$ und $T|_{B^c}$ studieren. Dies ist aber nur eine Erleichterung, wenn $0 < \mu(B) < 1$ gilt. Ist $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = 1$, so haben wir T durch obige Zerlegung nicht wesentlich vereinfacht.

Solch eine Überlegung bringt einen auf die Idee, diese „unzerlegbaren" Abbildungen zu studieren und zu versuchen jede maßerhaltende Abbildung durch „unzerlegbare" Abbildungen darzustellen. Diesen „unzerlegbaren" maßerhaltenden Abbildungen geben wir einen Namen:

Definition (Ergodizität)**.** Sei (Ω, Σ, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine maßerhaltende Abbildung T von (Ω, Σ, μ) heißt *ergodisch*, wenn für jedes $B \in \Sigma$ mit $T^{-1}(B) = B$ entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = 1$ gilt.

Aufgabe H4 (Ergodizität des Bernoulli-Shifts) (1 Punkt)

Betrachten Sie den Bernoulli-Shift aus Aufgabe G3. Zeigen Sie, dass S ergodisch ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(a) Nach einem Approximationssatz gibt es für alle $\varepsilon > 0$ und alle $B \in \Sigma$ eine endliche Vereinigung von paarweise disjunkten Zylindermengen Z mit $\mu(B \triangle Z) < \varepsilon$.
Zeigen Sie: $|\mu(B) - \mu(Z)| < \varepsilon$.

(b) Ist Z eine endliche Vereinigung von paarweise disjunkten Zylindermengen, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(Z \cap (S^n)^{-1}(Z)) = \mu(Z)^2$.

(c) Sei nun B in Σ mit $S^{-1}(B) = B$. Zeigen Sie $\mu(B) = \mu(B)^2$, indem Sie $|\mu(B) - \mu(B)^2|$ durch eine beliebig kleine Zahl approximieren.
Hinweis: Wenn Z die Menge B wie in (a) approximiert, wie gut approximiert $Z \cap (S^n)^{-1}(Z)$ dann B (mit $n \in \mathbb{N}$ wie in (b))?