Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vrzina

SS 2012
21. Mai 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Das Lebesguesche Maß von Quadern)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a < b$ und λ das Lebesguesche Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie

$$\lambda(]a, b[) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b]).$$

Aufgabe G2 (Translationsinvariante Maße)

Sei μ ein Maß auf dem Messraum $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ mit $\mu(W) = 1$, wobei $W := \prod_{n=1}^{d}]0, 1]$ den halboffenen Einheitswürfel in $\mathbb{R}^d$ bezeichne. Weiter gelte für alle halboffenen Quader Q und Vektoren $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\mu(x + Q) = \mu(Q).$$

Zeigen Sie, dass $\mu = \lambda$ gilt.
Folgern Sie, dass es für jede translationsinvariante Maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ eine Zahl $\alpha \geq 0$ gibt mit

$$\mu = \alpha \cdot \lambda.$$

Aufgabe G3 (Eine Variation des Satzes von Vitali)

Wir definieren mit Hilfe von Polarkoordinaten wie folgt Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$l_\varphi := \{(r, \varphi) : \ 0 < r \leq 1\}.$$

Es ist offensichtlich $\bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi[} l_\varphi = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $[0, 2\pi[$ durch $\varphi \sim \psi :\Leftrightarrow \varphi - \psi \in \mathbb{Q} \cdot \pi$. Sei $I \subseteq [0, 2\pi[$ derart, dass jede Äquivalenzklasse genau ein Element aus I enthalte und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cdot \pi \cap [0, 2\pi[$. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$E_n := \bigcup_{i \in I} l_{(i + x_n)}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Mengen E_n sind disjunkt und ihre Vereinigung ist $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

(b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Drehung T mit $T(E_m) = E_n$.

Stellen Sie sich die Familie $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Puzzle (mit abzählbar unendlich vielen Teilen) vor. Ist es möglich, durch sukzessives Verschieben und Drehen der Mengen $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Kopien von $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ zusammenzusetzen?

Aufgabe G4 (Die Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall)

Sei $\Omega_0 := \{0, 1, 2, ..., 9\}$ und sei $\Omega := \prod_{k=1}^{\infty} \Omega_0$. Wir definieren die *Gleichverteilung auf* Ω als das eindeutig bestimmte Maß μ, welches durch die konsistente Familie der Maße μ_n auf $\prod_{k=1}^{n} \Omega_0$ mit

$$\mu_n(\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}) := 10^{-n}$$

induziert wird. Dieses Maß ist also das Pendant des fairen Münzwurfs auf einer 10-elementigen Menge.

(a) Zeigen Sie: Die Menge aller Folgen $N := \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ist schließlich konstant}\}$ ist eine μ-Nullmenge.

Wir definieren nun eine Abbildung $\Phi : \Omega \setminus N \to [0, 1]$ durch

$$\Phi(\omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \cdot 10^{-k}.$$

(b) Zeigen Sie, dass Φ injektiv ist und das $\Phi(\Omega)^C$ eine Lebesguesche Nullmenge definiert.

(c) Sei $Z_i := \{\omega \in \Omega : \ \omega_1 = i\}$. Bestimmen Sie $\lambda(\Phi(Z_i))$.

(d) Zeigen Sie, dass für jede Zylindermenge $Z := Z_{(1,2,3,...,n),\ (j_1,j_2,...,j_n)}$ gilt: $\lambda(\Phi(Z)) = \mu(Z)$. Folgern Sie, dass für jede μ-meßbare Menge Z gilt: $\lambda(\Phi(Z)) = \mu(Z)$.

Wir nennen eine Zahl $x \in [0, 1]$ *satanisch*, falls die Ziffernfolge 666 in der Dezimalentwicklung von x mindestens einmal vorkommt.

(e) Zeigen Sie, dass die Menge aller satanischen Zahlen aus $[0, 1]$ Lebesguemaß 1 besitzt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Der Satz von Steinhaus) (1 Punkt)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge mit $\lambda(K) > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \in \mathbb{R}^d$ gibt mit $\lambda(U) \leq 2\lambda(K)$ und $K \cap U^C = \emptyset$. Zeigen Sie weiter, dass die Distanz $\delta := d(K, U^C) := \inf\{\|u - k\| : \; k \in K, \; u \in U^C\}$ echt positiv ist.

(b) Sei $t \in \mathbb{R}^d$ mit $\|t\| < \delta$. Zeigen Sie, dass $(t + K) \subseteq U$ gilt.

(c) Zeigen Sie den Satz von Steinhaus: Sei $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ eine Menge mit $\lambda(A) > 0$. Dann ist die Menge $A - A := \{a - b : \; a, b \in A\} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Nullumgebung.

Hinweis: Zeigen Sie für (c), dass für jedes $t \in K_\delta(0)$ die Mengen K und $(t + K)$ nicht disjunkt sein können.

Aufgabe H2 (Eine Mengenfunktion auf Teilmengen natürlicher Zahlen) (1 Punkt)

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren $s_n(A) := |\{k \in A : \; k \leq n\}|$ und setzen

$$d(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{s_n(A)}{n},$$

sofern dieser Grenzwert existiert. Sei $\mathscr{A}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, auf welchen d definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass d nicht σ-additiv auf $\mathscr{A}$ ist.

Wir betrachten die Menge $A := 2 \cdot \mathbb{N} = \{2n : \; n \in \mathbb{N}\}$ und definieren

$$B := \{k \in 2{\cdot}\mathbb{N} : \text{ Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } 2^{2n} \leq k \leq 2^{2n+1}\} \cup \{k \in 2{\cdot}\mathbb{N}+1 : \text{ Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } 2^{2n-1} \leq k \leq 2^{2n}\}.$$

(b) Entscheiden Sie, welche der Mengen A, B, $A \cup B$ in $\mathscr{A}$ enthalten sind. Ist $\mathscr{A}$ eine Algebra?

Aufgabe H3 (Zusatzaufgabe: Hausdorff-Maße) (+1 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\mathscr{A}$ die Menge aller $A \subseteq X$ mit

$$d(A) := \sup\{d(a, b) : \; a, b \in A\} < \infty.$$

Für Zahlen $\alpha > 0$ definieren wir äußere Maße durch

$$h_{\alpha,\delta}(B) := \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \left(d(A_n)\right)^\alpha : \; (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}, \; d(A_n) \leq \delta, \; B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}$$

und schließlich

$$h_\alpha(B) := \sup_{\delta>0}\{h_{\alpha,\delta}(B)\}.$$

Das äußere Maß h_α heißt *α-dimensionales äußeres Hausdorff-Maß*. Für $\alpha = 0$ setzen wir h_0 als das Zählmaß.

(a) Zeigen Sie: Ist $h_\alpha(B) < \infty$ so gilt $h_{\alpha+h}(B) = 0$ für alle $h > 0$.

(b) Sei $\alpha := \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ und C die Cantormenge. Zeigen Sie $h_\alpha(C) \leq 1$.
Hinweis: Nutzen Sie die Subadditivität und Monotonie des äußeren Maßes.

(c) Zeigen Sie: $h_\beta(C) > 0$ für alle $\beta < \alpha$.

Für eine Teilmenge $\emptyset \neq B \subseteq X$ heißt die Zahl $\delta(B) := \sup\{\alpha \geq 0 : \; h_\alpha(B) > 0\}$ die *Hausdorff-Dimension* von B. Somit gilt für die Cantormenge $\delta(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

Bemerkung: Für eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit nichtleerem Inneren gilt $\delta(B) = d$. Insofern ist die Hausdorff-Dimension eine Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffs.