Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vrzina

SS 2012
14. Mai 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Meßbare Mengen des äußeren Maßes)

Sei Ω eine nichtleere Menge und $\overline{\mu}$ ein äußeres Maß auf $\mathscr{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass jede Menge $A \subseteq \Omega$ mit $\overline{\mu}(A) = 0$ meßbar ist. Folgern Sie, dass $\Sigma_{\overline{\mu}}$ vollständig ist.

Aufgabe G2 (Fortsetzungen von Inhalten)

Sei μ ein Inhalt auf einem Halbring $\mathscr{H}$. Sei weiter $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf den von $\mathscr{H}$ erzeugten Ring $\mathscr{R}$. Zeigen Sie, dass die Fortsetzung von μ auf $\sigma(\mathscr{H})$ mit der Fortsetzung von $\tilde{\mu}$ auf $\sigma(\mathscr{R})$ übereinstimmt.

Aufgabe G3 (Das Maß der Cantormenge)

Sei $\mathscr{C} \subseteq [0,1]$ die Cantormenge. Zeigen Sie, dass $\mathscr{C}$ Borel meßbar ist und bestimmen Sie $\lambda(\mathscr{C})$.

Aufgabe G4 (Spektralmaße)

(a) Für $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{C}$ betrachten wir die Algebra der Funktionen $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{C}) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}\}$ auf Ω. Eine Funktion $f \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{C})$ heißt *positiv*, falls für alle $x \in \Omega$ gilt: $f(x) \geq 0$.
Sei $\varphi : \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional, d. h. φ ist linear und es gilt $\varphi(f) \geq 0$ für $f \geq 0$. Weiter gelte $\varphi(\mathbb{1}) = 1$. Zeigen Sie, dass es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_φ auf Ω gibt, so dass für alle $A \subseteq \Omega$ gilt:

$$\mu_\varphi(A) = \varphi(\chi_A).$$

(b) Sei A eine normale komplexe $n \times n$-Matrix. Wir bezeichnen die Menge aller Eigenwerte von A mit $\sigma(A)$. Es ist bekannt, dass für $f \in \mathscr{F}(\sigma(A), \mathbb{C})$ ein Polynom p existiert mit $p(x) = f(x)$ für alle $x \in \sigma(A)$. Sei weiter $\xi \in \mathbb{C}^n$ ein Einheitsvektor. Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\varphi_\xi(f) := \langle p(A) \cdot \xi, \xi \rangle$$

ein wohldefiniertes positives lineares Funktional auf $\mathscr{F}(\sigma(A), \mathbb{C})$ definiert und damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_ξ auf $\sigma(A)$ induziert.
Die Menge $\sigma(A)$ heißt *Spektrum von A* und das Maß μ_ξ heißt *Spektralmaß zu* ξ.

(c) Betrachten Sie die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie für einen Einheitsvektor $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ das entsprechende Spektralmaß μ_ξ auf dem Spektrum von A.

Aufgabe G5 (Ein Gegenbeispiel)

Sei $\mathscr{A} := \{N \subseteq \mathbb{N} : N \text{ ist endlich oder } N^C \text{ ist endlich}\}$. Wir definieren

$$\mu(N) := \begin{cases} \infty & \text{für } N \text{ unendlich,} \\ 0 & \text{für } N \text{ endlich.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion μ ein Inhalt aber kein Prämaß auf dem Ring $\mathscr{A}$ ist. Zeigen Sie weiter, dass für den Inhalt μ die Implikation (d) $\Rightarrow$ (a) aus Proposition 2.15 falsch ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Kardinalität der Lebesgueschen σ-Algebra) (1 Punkt)

Man kann zeigen, dass $|\mathscr{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$ gilt, die Borelsche σ-Algebra also gleichmächtig zu den reellen Zahlen ist. Zeigen Sie, dass die Lebesguesche σ-Algebra gleichmächtig zu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe H2 (Das innere Maß) (1 Punkt)
Sei Ω eine nichtleere Menge und μ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ mit $\mu(\Omega) = 1$. Für eine Menge $A \subseteq \Omega$ definieren wir das innere Maß

$$\underline{\mu}(A) := 1 - \overline{\mu}(A^C),$$

wobei $\overline{\mu}$ das äußere Maß zu μ bezeichne. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für jedes $A \subseteq \Omega$ gibt es eine Menge $\overline{A} \in \sigma(\mathscr{A})$ mit $A \subseteq \overline{A}$ und $\overline{\mu}(A) = \overline{\mu}(\overline{A})$.

(b) Für jedes $A \subseteq \Omega$ gibt es eine Menge $\underline{A} \in \sigma(\mathscr{A})$ mit $\underline{A} \subseteq A$ und $\underline{\mu}(\underline{A}) = \underline{\mu}(A)$.

(c) Eine Menge $A \subseteq \Omega$ ist genau dann $\overline{\mu}$-meßbar, wenn $\overline{\mu}(A) = \underline{\mu}(A)$ gilt.

Aufgabe H3 (Ein äußeres Maß zu einem Inhalt) (1 Punkt)

Betrachten Sie folgende Verteilungsfunktion:

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \\ 2 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Sie wissen bereits, dass diese Funktion einen Inhalt μ_F auf $\mathscr{H}$, dem Halbring aller endlichen halboffenen Intervalle auf $\mathbb{R}$, definiert. Bestimmen Sie das äußere Maß $\overline{\mu}_F : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ und eine Verteilungsfunktion des Maßes $\overline{\mu}_F|\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Aufgabe H4 (Preisaufgabe)

Sei F_0 eine monoton wachsende reelle Funktion. Diese definiert einen Inhalt μ_0 auf $\mathscr{H}$, dem Halbring aller endlichen halboffenen Intervalle auf $\mathbb{R}$. Über das durch μ_0 induzierte äußere Maß $\overline{\mu_0}$ erhalten Sie ein Maß μ auf $\sigma(\mathscr{R})$, indem Sie $\overline{\mu_0}$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ einschränken. Dieses Maß besitzt natürlich wieder eine Verteilungsfunktion F. Untersuchen und charakterisieren Sie, auf welche Weise F als reelle Funktion aus F_0 entsteht.
Die Bearbeitungen dieser Aufgabe können bis Ende Juni abgegeben werden. Als Preise winken einige Tafeln Schokolade.

Aufgabe H5 (Konkrete Wahrscheinlichkeitsmaße auf Folgenräumen) (1 Punkt)

In dieser Aufgabe greifen wir das vierte Übungsblatt wieder auf, um wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle zu konstruieren. Insbesondere können Sie alle Ergebnisse des vierten Übungsblattes zur Bearbeitung dieser Aufgabe verwenden.
Sei $\Omega_0 := \{Z, K\}$ und $\Omega := \prod_{n\in\mathbb{N}} \Omega_0$. Wir betrachten den von den Zylindermengen erzeugten Halbring $\mathscr{R}$ bzw. die davon erzeugte σ-Algebra $\mathscr{A}$ auf Ω.

Der Münzwurf

Wir starten mit einer verbeulten Münze. Wird diese Münze geworfen, so erhalten wir mit Wahrscheinlichkeit $0 \le \lambda \le 1$ als Ergebnis „Kopf" und mit Wahrscheinlichkeit $(1-\lambda)$ „Zahl". Wir bezeichnen mit μ_0 das durch diese Münze definierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω_0.
Konstruieren Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf Ω mit folgender Eigenschaft: Ist $J = (j_0, \ldots, j_n) \in \Omega_n$ ein beliebiges endliches Ergebnistupel, so gilt:

$$\mu\left(\{\omega \in \Omega :\ \omega_0 = j_0,\ \omega_1 = j_1, \ldots,\ \omega_n = j_n\}\right) = \lambda^k \cdot (1-\lambda)^{n+1-k},$$

wobei k die Anzahl an „K" in J bezeichne. Deuten Sie, inwiefern Ihr Maß einen beliebig oft wiederholten Münzwurf modelliert.

Der Versicherungsvertreter

Wir betrachten einen Vertreter einer großen Schweizer Bank. Dieser arbeitet entweder eine Woche in Zürich oder eine Woche in Köln. Ohne die genauen Gründe seiner Dienstreisen zu kennen, haben Sie folgendes in den vergangenen Monaten beobachtet: Sofern der Vertreter eine Woche in Zürich gearbeitet hat, so arbeitet er in der Hälfte der Fälle in der Folgewoche in Zürich und in der anderen Hälfte der Fälle in der Folgewoche in Köln. Hat der Vertreter hingegen in einer Woche in Köln gearbeitet, so arbeitet er in der darauf folgenden Woche immer in Zürich
Konstruieren Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf Ω mit folgenden Eigenschaften:

- Der Vertreter startet in Zürich, es gilt also $\mu\left(\{Z\} \times \prod_{k=1}^{\infty} \Omega_0\right) = 1$.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, den Pfad $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1})$ in der $(n+1)$-ten Woche zu beobachten, ergibt sich durch das Produkt der Wahrscheinlichkeit, den Pfad $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ in der n-ten Woche beobachtet zu haben, und aus der im Text gegebenen Wahrscheinlichkeit, dass der Vertreter für die $n+1$-te Woche aus ω_n nach ω_{n+1} reist.

Bestimmen Sie weiter alle Zylindermengen Z mit $\mu(Z) = 0$.

Zusatzfragen

Betrachten Sie weiter die stochastische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, den Vertreter in der $n-$ten Arbeitswoche in Zürich anzutreffen durch $(A^n)_{1,1}$ gegeben ist und die Wahrscheinlichkeit, den Vertreter in der $n-$ten Arbeitswoche in Köln anzutreffen durch $(A^n)_{1,2}$ gegeben ist.
Angenommen, der Vertreter arbeitet diese Woche in Zürich und einer Ihrer Bekannten bietet Ihnen eine 100 Euro Wette an, dass der Vertreter in 46 Arbeitswochen in Köln arbeiten wird. Nehmen Sie diese Wette an?
Gibt es eine geeignete Münze, so dass das Maß μ des Versicherungsvertreters durch das Maß des Münzwurfs beschrieben werden kann?