Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vrzina

SS 2012
7. Mai, 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Verteilungsfunktionen von Punktmaßen)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_μ von $\mu := \delta_x$.

Aufgabe G2 (Unstetigkeitsstellen monoton wachsender Funktionen)

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Wir definieren

$$A_n := \left\{ x \in [-n, n] : \lim_{k\to\infty} \left(F\left(x + \frac{1}{k}\right) - F\left(x - \frac{1}{k}\right)\right) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge A_n endlich ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ aus genau den Punkten $x \in \mathbb{R}$ besteht, in welchen F unstetig ist.

(c) Folgern Sie, dass die Menge aller Unstetigkeitsstellen einer monoton wachsenden Funktion abzählbar ist.

Aufgabe G3 (Eine singuläre Verteilungsfunktion)

Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Bijektion. Wir definieren ein Maß

$$\mu := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \cdot \delta_{\varphi(n)},$$

wobei $\delta_{\varphi(n)}$ das Punktmaß im Punkt $\varphi(n)$ bezeichnet. Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in welchen die Verteilungsfunktion F_μ von μ stetig ist.

Aufgabe G4 (Zerlegungen von Verteilungsfunktionen)

Eine Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Sprungfunktion*, falls es eine abzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $p : A \to [0, \infty[$ gibt mit

$$\sum_{y \in [-n,n] \cap A} p(y) < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt: Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = \begin{cases} \alpha + \sum_{y \in A \cap]0,x]} p(y) : & x \geq 0, \\ \alpha - \sum_{y \in A \cap]x,0]} p(y) : & x < 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion aus G3 eine Sprungfunktion ist.

(b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine rechtseitig stetige, monoton wachsende Funktion und es sei

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \ F \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}.$$

Wir definieren eine Funktion $p : A \to [0, \infty[$ durch

$$p(y) := \lim_{n \to \infty} \left(F\left(y + \frac{1}{n}\right) - F\left(y - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Sei G die zugehörige Sprungfuntion. Zeigen Sie, dass $H := F - G$ monoton wachsend und stetig ist. Also besitzt jede rechtsseitig stetige monoton wachsende Funktion eine Zerlegung in eine stetige monoton wachsende Funktion und eine Sprungfunktion.

(c) Zeigen Sie, dass die Zerlegung einer monoton wachsenden rechtsstetigen Funktion in eine Sprungfunktion und eine monoton wachsende stetige Funtktion, bis auf eine Konstante, eindeutig ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Verteilungsfunktionen) (1 Punkt)

(a) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine rechtsseitig stetige und monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\mu_F(]a, b]) := F(b) - F(a)$$

ein endliches Prämaß auf dem Halbring der endlichen halboffenen Intervalle definiert.
Hinweis: Variieren Sie den Beweis der σ-Additivität des lebesgueschen Prämaßes aus der Vorlesung.

(b) Ist μ ein endlicher Inhalt auf dem Halbring der endlichen halboffenen Intervalle, so ist μ genau dann ein Prämaß, wenn die Verteilungsfunktion F_μ rechtsseitig stetig ist.

(c) Sei F_μ die Verteilungsfunktion eines Maßes μ. Zeigen Sie, dass F_μ genau dann an der Stelle $t \in \mathbb{R}$ stetig ist, wenn $\mu(\{t\}) = 0$ gilt.

Wahrscheinlichkeitsmaße auf Folgenräumen

In den folgenden Hausübungen wollen wir eine Methode kennen lernen, um Modelle für die Wahrscheinlichkeitstheorie zu konstruieren. Für einen ersten Einblick beschränken uns hierbei auf Folgenräume mit Werten in einer endlichen Menge. Mit naheliegenden Verallgemeinerungen und viel mehr technischem Aufwand können beispielsweise auf dem Raum der stetigen Funktionen für die Finanzmathematik Wahrscheinlichkeitsmaße konstruiert werden, welche halbwegs sinnvoll die Wertentwicklung von Aktienkursen modellieren oder es können auf dem Raum der stetigen Funktionen für die mathematischen Physik Wahrscheinlichkeitsmaße konstruiert werden, welche Diffusionsprozesse beschreiben. Ein Anwendung dieser Theorie ist unter anderem die Konstruktion von Lösungen bestimmter partieller Differentialgleichungen, z. B. Wärmeleitungsgleichungen.

Notation

Sei $d \in \mathbb{N}^+$ fest und sei $\Omega_0 := \{1, 2, ..., d\}$. Wir definieren

$$\Omega := \prod_{k=0}^{\infty} \Omega_0 = \{\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ \omega_n \in \Omega_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Menge Ω enthält also alle Folgen mit Werten in Ω_0.
Weiter ist es sinnvoll, folgende endliche Produkträume zu definieren: Für $n > 0$ setze

$$\Omega_n := \prod_{k=0}^{n} \Omega_0.$$

Sei I eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen mit $I = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$, wobei wir vereinbaren, dass die Reihenfolge der Aufzählung nicht wichtig ist und kein Element der Menge mehrfach aufgezählt ist. Für die Anzahl der Elemente von I schreiben wir $|I| = n$.
Für $I = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$ und $J = (j_1, ..., j_n) \in \Omega_n$ definieren wir wie folgt die Zylindermenge zu I und J:

$$Z_{I,J} := \{\omega \in \Omega :\ \omega_{i_1} = j_1, \omega_{i_2} = j_2, ..., \omega_{i_n} = j_n\}.$$

Diese Menge enthält also genau die Folgen, deren Wert an jeder Position in I durch J festgelegt ist. Beispielsweise gilt für $I = (1, 3)$ und $J = (1, 1)$:

$$Z_{I,J} = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1,\ \omega_3 = 1\} = \Omega_0 \times \{1\} \times \Omega_0 \times \{1\} \times \prod_{k=4}^{\infty} \Omega_0.$$

Aufgabe H2 (Zylindermengen) (1 Punkt)
Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathscr{H} := \left\{ Z_{I,J} : I \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \text{ endlich}, J \in \Omega_{|I|} \right\} \cup \{\emptyset\}$$

einen Halbring über Ω definiert.

Aufgabe H3 (Der Konsistenzsatz von Kolmogorov für Folgenräume) (1 Punkt)

Unser Ziel ist es, auf dem Raum Ω Wahrscheinlichkeitsmaße zu konstruieren. Dazu benötigen wir den Begriff der *konsistenten Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen*:

Definition: Sei μ_n ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Meßraum $(\Omega_n, \mathscr{P}_n)$, wobei $\mathscr{P}_n$ die Potenzmenge von Ω_n sei. Die Familie $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konsistent*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$\mu_{n+1}(A \times \Omega_0) = \mu_n(A).$$

Wir wollen nun zeigen, dass es eine eins zu eins Beziehung zwischen konsistenten Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen und Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ω gibt. Dazu definieren wir Abbildungen $\Phi_n : \mathscr{P}_n \to \sigma(\mathscr{H})$ durch

$$\Phi_n(A) := A \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \Omega_0.$$

Weiter definieren wir unseren Kandidaten für das Prämaß auf dem von $\mathscr{H}$ erzeugten Ring $\mathscr{R}$:

$$\mu(\Phi_m(B)) := \mu_m(B).$$

(a) Sei $B^n \in \mathscr{P}_n$ und $B^{n+k} \in \mathscr{P}_{n+k}$ mit $\Phi_n(B^n) = \Phi_{n+k}(B^{n+k})$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mu_n(B^n) = \mu_{n+k}(B^{n+k}).$$

Also ist μ wohldefiniert.

(b) Seien $\hat{B}_1, \ldots, \hat{B}_n \in \mathscr{R}$ beliebige disjunkte Mengen. Weiter sei $m \in \mathbb{N}$ derart, dass es Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{P}_m$ gibt mit $\hat{B}_i = \Phi_m(B_i)$ für alle $1 \le i \le n$. Zeigen Sie:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} \hat{B}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\hat{B}_k).$$

Folgern Sie daraus, dass μ ein Inhalt auf $\mathscr{R}$ ist.

(c) Sei $(\hat{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge aus $\mathscr{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\hat{B}_n) = \delta > 0.$$

Zeigen Sie, dass dann die Menge

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \hat{B}_n$$

nicht leer ist. Somit ist μ ein Prämaß auf $(\Omega, \mathscr{R})$.

Hinweis: Sie können ohne Einschränkung annehmen, dass $\hat{B}_n = \Phi_n(B_n)$ für ein $B_n \in \mathscr{P}_n$ gilt. Zeigen Sie, dass jede der Mengen $\hat{B}_n$ nicht leer ist. Konstruieren Sie nun iterativ einen Punkt $\omega \in \Omega$ mit

$$(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) \in B_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, indem Sie verwenden, dass jede Folge in Ω_0 einen Häufungspunkt besitzt und indem Sie sich erinnern, wie ein Teilfolgen von Teilfolgen Argument im Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstras einging. Verwenden Sie für die Folgerung Proposition 2.15.