Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vrzina

SS 2012
30. April, 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Elementare Eigenschaften von Inhalten)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring über einer Menge Ω und $\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt auf $\mathscr{R}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Sind $A, B \in \mathscr{R}$ mit $A \subseteq B$, so gilt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.
Ist weiter $\mu(A) < \infty$, so gilt also $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(b) Sind $A, B \in \mathscr{R}$, so gilt $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(c) Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{R}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Aufgabe G2 (Konvexe Mengen und Extremalpunkte)

In dieser Aufgabe wollen wir G3 vorbereiten: Wir wollen sehen, dass die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$ konvex ist und in einfachen Fällen eine schöne Zerlegungstheorie erlaubt. Zur Erinnerung:
1) Eine Teilmenge K eines Vektorraums V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt *konvex*, wenn für $x, y \in K$ und $\lambda \in [0, 1]$ auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ gilt.
2) Sei K eine konvexe Menge. Ein Punkt $x \in K$ heißt *Extremalpunkt von K*, falls gilt: Ist $\lambda \in]0, 1[$ eine Zahl, $a, b \in K$ und gilt $x = \lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b$, so folgt bereits $a = b = x$.

(a) Sei $K := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le x \le 1\}$. Bestimmen Sie alle Extremalpunkte von K.

(b) Sei $K := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < 1\}$. Bestimmen Sie alle Extremalpunkte von K.

(c) Sei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \le 1, \ x \ge 0, \ y \ge 0\}$. Bestimmen Sie alle Extremalpunkte von K.

(d) Sei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$. Bestimmen Sie alle Extremalpunkte von K.

(e) Sei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1\}$. Bestimmen Sie alle Extremalpunkte von K.

In welchen Fällen ist es möglich, ein Element von K als Konvexkombination der Extremalpunkte zu schreiben? In welchen Fällen ist solch eine Konvexzerlegung sogar eindeutig?

Aufgabe G3 (Wahrscheinlichkeitsmaße)

Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum. Wir definieren

$$\mathscr{M}_1((\Omega, \mathscr{A})) := \{\mu : \mathscr{A} \to [0,1],\ \mu \text{ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.}\}$$

und schreiben in Kurzform $\mathscr{M} := \mathscr{M}_1((\Omega, \mathscr{A}))$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{M}$ eine konvexe Menge ist.

Wir betrachten nun den Spezialfall $\Omega = \{1,2,3\}$ und $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Wir beschreiben nun die Geometrie der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathscr{M}$:

(b) Zeigen Sie, dass $\mathscr{M}$ genau drei Extremalpunkte enthält.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß aus $\mathscr{M}$ eindeutig als Konvexkombination von Extremalpunkten von $\mathscr{M}$ dargestellt werden kann. Zu welchem geometrischen Objekt ist also $\mathscr{M}$ affin isomorph?

(d*) Überlegen Sie, wie Sie obige Resultate auf andere Messräume verallgemeinern könnten.

Aufgabe G4 (Eine Diskussion zur σ-Additivität)

Sei $\Omega := \mathbb{R}$ und $\mathscr{H}$ der von den halboffenen Intervallen erzeugte Halbring. Nehmen Sie Stellung zu folgender Argumentation:
Der Inhalt $\mu(]a,b]) := b - a$ ist im Gegensatz zur Behauptung aus der Vorlesung doch nicht σ-additiv. Angenommen, der Inhalt wäre ein Prämaß. Dann ist auch die Fortsetzung von μ auf den von $\mathscr{H}$ erzeugten Ring $\mathscr{R}$ ein Prämaß. Dies kann nicht sein: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen, welche absolut summierbar ist mit Summe $q < 0,5$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Wir setzen

$$A_n :=]x_n - a_n, x_n + a_n].$$

Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, erhalten wir $]0,1] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Weil μ ein Prämaß ist, gilt:

$$\mu(]0,1]) \le \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

und es folgt

$$1 = \mu(]0,1]) \le \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 2 \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 2 \cdot q < 1,$$

ein Widerspruch. Also kann μ kein Prämaß auf $\mathscr{R}$ induzieren und die Behauptung aus der Vorlesung ist falsch.

Hausübung

Aufgabe H1 (Maße und Inhalte auf dem Einheitsintervall I) (2 Punkte)

Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathscr{P}$ die Potenzmenge von Ω. In dieser Aufgabe charakterisieren wir alle Inhalte auf $\mathscr{P}$, die nur die Werte 0 und 1 annehmen. Dazu bedienen wir uns eines Hilfsmittels, des Ultrafilters:
Definition: Ein *Ultrafilter* $\mathscr{U}$ auf Ω ist ein Mengensystem $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, welches folgende Eigenschaften hat:

(F1) Es gilt $\emptyset \notin \mathscr{U}$.

(F2) Ist $A \in \mathscr{U}$ und $B \subseteq \Omega$ mit $A \subseteq B$, so folgt $B \in \mathscr{U}$.

(F3) Aus $A, B \in \mathscr{U}$ folgt $A \cap B \in \mathscr{U}$.

(UF) Ist $A \subseteq \Omega$ so gilt entweder $A \in \mathscr{U}$ oder $A^C \in \mathscr{U}$.

Die ersten drei Bedingungen definieren einen *Filter* auf Ω. Die Bedingung (UF) charakterisiert die Ultrafilter unter den Filtern. Man kann zeigen, dass jeder Filter in einem Ultrafilter enthalten ist. Da die entsprechenden Existenzsätze auf dem Auswahlaxiom beruhen, ist es, bis auf vergleichsweise wenig Ausnahmen, unmöglich, Ultrafilter konkret anzugeben.

Wir sehen nun den Zusammenhang des Ultrafilterbegriffs mit der Ausgangsfrage. Zeigen Sie:

(a) Sei μ ein Inhalt auf $(\Omega, \mathscr{P})$ mit $\mu(\Omega) = 1$ und $\mu(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathscr{P}$. Dann definiert die Menge $\mathscr{U}_\mu := \{A \in \mathscr{P} : \mu(A) = 1\}$ einen Ultrafilter auf Ω.

(b) Für $\omega \in \Omega$ definiert das Punktmaß δ_ω einen Inhalt, welcher die Voraussetzungen aus (a) erfüllt. Bestimmen Sie den zu δ_ω gehörigen Ultrafilter.

(c) Ist umgekehrt $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf Ω so definiert $\mu_\mathscr{U}(A) := 1$ für $A \in \mathscr{U}$ und $\mu_\mathscr{U}(A^C) := 0$ für $A \in \mathscr{U}$ einen Inhalt auf $(\Omega, \mathscr{P})$ mit $\mu_\mathscr{U}(\Omega) = 1$ und $\mu_\mathscr{U}(A) \in \{0, 1\}$.

(d) Ist $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf Ω, so ist der Inhalt $\mu_\mathscr{U}$ genau dann ein Maß, wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}$ gilt:
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

(e) Es existiert ein Inhalt μ auf $\mathbb{N}$ mit $\mu(\mathbb{N}) = 1$, mit $\mu(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ und mit $\mu(A) = 0$ für alle endlichen Mengen $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Ein solcher Inhalt ist kein Maß auf $\mathbb{N}$.
Hinweis: Finden Sie einen geeigneten Filter und nutzen Sie die Ausgangsbemerkung, dass es einen Ultrafilter $\mathscr{U}$ gibt, der Ihren Filter enthält.

Aufgabe H2 (Maße und Inhalte auf dem Einheitsintervall II) (1 Punkt)

Sei $\Omega := \mathbb{Q}$ und sei $\mathscr{R}$ der Ring, der von dem Halbring

$$\mathscr{H} := \{]a,b] \cap \mathbb{Q} : \ a,b \in \mathbb{R}\}$$

erzeugt wird. Wir definieren $\mu(]a,b] \cap \mathbb{Q}) := b - a$. Wir wollen zeigen, dass μ zwar ein Inhalt, aber nicht σ-additiv ist.

(a) Machen Sie sich klar, dass $\mathscr{H}$ ein Halbring ist und zeigen Sie, dass μ auf $\mathscr{H}$ einen Inhalt definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Fortsetzung von μ auf $\mathscr{R}$ kein Prämaß ist und damit μ auf $\mathscr{H}$ kein Prämaß sein kann.

Bemerkung: Es ist nun etwas weniger intuitiv klar, dass der Längenbegriff von Intervallen mit abzählbar unendlichen Zerlegungen verträglich ist. Somit ist der Beweis dieser doch nicht trivialen Aussage für die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ irgendwo erleichternd.