Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vrzina

SS 2012
23. April, 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Punktmaße)

Sei $\Omega := [0,1]$, sei $\mathscr{A} := \mathscr{P}([0,1])$, sei $x \in [0,1]$ und sei

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass δ_x ein Maß auf $([0,1], \mathscr{A})$ definiert. Dieses Maß heißt *Punktmaß in x* oder auch *Diracmaß in x*.

Aufgabe G2 (Charakterisierung von Maßen)

Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Meßraum und μ ein Inhalt auf $\mathscr{A}$.
Zeigen Sie, dass folgende zwei Bedingungen äquivalent sind:

(1) μ ist ein Maß.

(2) Für jede monoton wachsende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ gilt $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Betrachten Sie weiter folgende Bedingung:

(3) Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ mit $\mu(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ gilt $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Zeigen Sie, dass diese Bedingung für einen endlichen Inhalt äquivalent zu (1) ist. Für nicht endliche Inhalte ist nur (1) $\Rightarrow$ (3) war, aber (3) $\Rightarrow$ (1) im Allgemeinen falsch.

Aufgabe G3 (Zur Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$)

Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, so enthält A einen offenen Quader $]a,b[$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^d$.

(b) Die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^d$ mit rationalen Endpunkten ist abzählbar.

(c) Jede offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ist abzählbare Vereinigung von Quadern mit rationalen Endpunkten. Also gilt $\sigma\left(\left\{]a,b[:\ a,b \in \mathbb{Q}^d\right\}\right) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

(d) Es gilt $\sigma\left(\left\{]-\infty, a] :\ a \in \mathbb{Q}^d\right\}\right) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe G4 (Nullmengen und fast sichere Ereignisse)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also ein Maßraum mit $\mu(\Omega) = 1$. In der Wahrscheinlichkeitstheorie heißen die Elemente von $\mathscr{A}$ auch *Ereignisse* und ein Ereignis $A \in \mathscr{A}$ heißt *fast sicheres Ereignis*, wenn $\mu(A) = 1$ gilt. Wir definieren

$$\mathscr{N} := \big\{A \in \mathscr{A} : \ \mu(A) \in \{0, 1\}\big\}.$$

Zeigen Sie, dass diese Menge eine σ-Algebra definiert.

Hausübung

Aufgabe H1 (Der Satz von Vitali) (1 Punkt)

Wir wollen in dieser Aufgabe den Satz von Vitali beweisen:
Satz: *Es gibt auf* $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ *kein translationsinvariantes Maß* μ *mit* $0 < \mu([0,1]) < \infty$.

Dazu gehen wir wie folgt vor: Für $x, y \in \mathbb{R}$ erklären wir die Relation

$$x \sim y, \text{ genau dann, wenn gilt: } x - y \in \mathbb{Q}.$$

(a) Machen Sie sich klar, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und jede Äquivalenzklasse von einem Element aus $[0,1]$ repräsentiert wird.

Mit Hilfe des Auswahlaxioms folgt, dass es eine Menge $E \subseteq [0,1]$ gibt, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Vertreter enthält.
Wir erinnern daran, dass für $x \in \mathbb{R}$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ definiert ist: $x + A := \{x + a : \ a \in A\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $(p + E) \cap (q + E) = \emptyset$ für $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p \neq q$ gilt.

(c) Zeigen Sie:

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q + E) \subseteq [-1,2].$$

(d) Angenommen, es gäbe ein Maß $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ mit $\mu([0,1]) = 1$ und $\mu(A) = \mu(x + A)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Folgern Sie einen Widerspruch indem Sie zeigen, dass E nicht meßbar wäre.
Hinweis: Nehmen Sie an, $\mu(E)$ existiert. Zeigen Sie zum einen, dass $\mu(E) = 0$ und zum anderen, dass $\mu(E) > 0$ gelten müsste, indem Sie das Maß auf den Mengen in (c) geeignet auswerten und die Translationsinvarianz benutzen.

Aufgabe H2 (Vervollständigung von σ-Algebren) (1 Punkt)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren

$$\mathscr{N} := \{A \subseteq \Omega : \text{ Es gibt eine Menge } N \in \mathscr{A} \text{ mit } A \subseteq N \text{ und } \mu(N) = 0\}.$$

Weiter setzen wir $\overline{\mathscr{A}} := \sigma(\mathscr{A}, \mathscr{N})$. Zeigen Sie, dass es ein Maß $\overline{\mu}$ auf $\overline{\mathscr{A}}$ gibt mit $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}$. Berechnen Sie weiter $\overline{\mu}(N)$ für $N \in \sigma(\mathscr{N})$. Der Maßraum $(\Omega, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ heißt *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Machen Sie sich klar, dass $(\overline{\overline{\mathscr{A}}}, \overline{\overline{\mu}}) = (\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ gilt.
Betrachten Sie nun den konkreten Maßraum $\left(\mathbb{Z}, \sigma(\mathscr{P}(\mathbb{N})),\ \mu := \delta_0\right)$. Bestimmen Sie alle Nullmengen in $\mathscr{A}$, sowie die Vervollständigung dieses Maßraums.

Aufgabe H3 (Mächtigkeit von σ-Algebren) (1 Punkt)

Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Wir wollen zeigen, dass $\mathscr{A}$ entweder endlich oder überabzählbar unendlich ist.
Sei dazu $\mathscr{A}$ eine abzählbare σ-Algebra. Wir definieren für $x \in \Omega$ die Menge

$$M_x := \bigcap_{B \in \mathscr{A}:\ x \in B} B.$$

Folgern Sie, dass $M_x \in \mathscr{A}$ gilt für jedes $x \in \Omega$. Diskutieren Sie weiter, dass $\sigma(\{M_x,\ x \in \Omega\})$ entweder endlich ist oder überabzählbar unendlich viele Elemente enthält. Also kann es keine abzählbar unendlichen σ-Algebren geben.
Hinweis: Aus dem Satz von Cantor folgt, dass die Menge $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

Aufgabe H4 (Limes superior und Limes inferior) (1 Punkt)

Sei Ω eine nicht leere Menge und $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra. Wir definieren für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{x \in \Omega :\ x \in A_n \text{ für unendlich viele Zahlen } n \in \mathbb{N}.\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{x \in \Omega :\ \text{Es gibt eine Zahl } n(x) \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in A_m \text{ für alle } m \geq n(x).\}$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gilt $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(b) Es gilt $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{A}$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

(c) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, also $A_n \subseteq A_{n+1}$, so gilt $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Finden Sie weiter ein Beispiel für eine Menge Ω, eine σ-Algebra $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ und eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ mit

$$\emptyset \neq \liminf_{n\to\infty} A_n \neq \limsup_{n\to\infty} A_n.$$