Analysis IV
Maß- und Integrationstheorie
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig
Miroslav Vrzina

SS 2012
16. April, 2012

Erinnerung

Sei Ω eine Menge. Eine Teilmenge $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, falls folgende Axiome erfüllt sind:

(S1) Es gilt $\emptyset \in \mathscr{A}$.

(S2) Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $A^C \in \mathscr{A}$.

(S3) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ eine abzählbare Familie, so gilt auch $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathscr{A}$.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Eine endliche σ-Algebra)

Wir betrachten $\Omega := \{1,2,3,4\}$ und das Mengensystem $\mathscr{E} := \{\{1,2,3\},\{3,4\}\} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. Bestimmen Sie die kleinste σ-Algebra $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, die $\mathscr{E}$ enthält.

Aufgabe G2 (Beispiele und Gegenbeispiele zu σ-Algebren)

Welche der folgenden Mengensysteme sind σ-Algebren? Welche Axiome sind ggf. verletzt, welche ggf. erfüllt?

(a) $\Omega = \mathbb{Z}$, $\mathscr{A} := \{A \subseteq \Omega : \ 42 \in A\}$.

(b) $\Omega = \mathbb{Z}$, $\mathscr{A} := \{A \subseteq \Omega : \ n \in A \Rightarrow (-n) \in A\}$.

(c) $\Omega = \mathbb{Z}$, $\mathscr{A} := \{A \subseteq \Omega : \ A \text{ enthält keine Primzahl oder } A^C \text{ enthält keine Primzahl}\}$.

(d) $\Omega = \mathbb{Z}$, $\mathscr{A} := \{A \subseteq \Omega : \ A \text{ ist endlich}\}$.

(e) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} := \{A \subseteq \Omega : \ A \text{ ist abzählbar oder } A^C \text{ ist abzählbar}\}$.

(f) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} := \{A \subseteq \Omega : \ A \text{ ist offen oder } A^C \text{ ist offen}\}$.

Aufgabe G3 (Mengenoperationen unter Urbildern)

Seien X und Y Mengen und sei $f : X \to Y$ eine Funktion.
Aus Ihrem Studium wissen Sie, dass für eine Teilmenge $B \subseteq Y$ durch

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

das Urbild von B unter f definiert ist. Weiter sollten Ihnen folgende Verträglichkeiten des Urbilds mit Mengenoperationen bekannt sein:
Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Teilmengen von Y. Dann gilt:

- $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
- $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
- $f^{-1}\left(B_i \setminus B_j\right) = f^{-1}(B_i) \setminus f^{-1}(B_j)$.

Sei nun $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Y. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\mathscr{A}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{A}\}$ eine σ-Algebra über X definiert.

Aufgabe G4 (Wiederholung: Mächtigkeit von Mengen)

Sind X und Y zwei Mengen, so heißt Y *mächtiger als* X, falls eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert. Wir schreiben in diesem Fall auch $X \preceq Y$. Eine Menge X mit $X \preceq \mathbb{N}$ heißt *abzählbar*. Gilt $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$, so heißen X und Y *gleichmächtig*. Der Satz von Cantor-Schröder-Bernstein besagt, dass es zwischen gleichmächtigen Mengen immer eine Bijektion gibt. Weiter gilt stets $X \preceq Y$ oder $Y \preceq X$. Somit sind je zwei Mengen vergleichbar.

(a) Seien X, Y disjunkte abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass auch $X \cup Y$ abzählbar ist.

(b) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}$ eine abzählbare Menge ist.

(c) Seien X, Y abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass auch $X \times Y$ abzählbar ist.

(d) Folgern Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

(e) Zeigen Sie, dass $[0, 1]$ nicht abzählbar ist.

Hinweis: Für Teil (e) können Sie unter anderem mit Hilfe von Intervallschachtelung (vgl. 8. Tutorium aus Analysis I) oder mit Hilfe des Diagonalverfahrens nach G. Cantor argumentieren.

Hausübung

Aufgabe H1 (Erzeugung von σ-Algebren I) (1 Punkt)

Sei Ω eine beliebige Menge.

(a) Sei $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von σ-Algebren über Ω. Zeigen Sie, dass dann auch die Menge

$$\mathscr{A} := \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$$

eine σ-Algebra über Ω ist.

(b) Sei nun $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ ein Mengensystem. Zeigen Sie, dass es eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathscr{E})$ über Ω gibt, die $\mathscr{E}$ enthält. Dies bedeutet: Ist $\mathscr{B}$ eine σ-Algebra über Ω und gilt $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{B}$, so folgt bereits $\sigma(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{B}$.

Aufgabe H2 (Erzeugung von σ-Algebren II) (1 Punkt)

Sei $\Omega =]0,1[$ und sei $\mathscr{E} := \left\{ \left]0, \frac{1}{n}\right[: n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\} \subseteq \mathscr{P}(]0,1[)$. Sei weiter $\mathscr{A}$ die von $\mathscr{E}$ erzeugte σ-Algebra.

(a) Entscheiden Sie, ob $\left[\frac{1}{42}, \frac{1}{7}\right[$ in $\mathscr{A}$ liegt.

(b) Bestimmen Sie die Elemente von $\mathscr{A}$.

Aufgabe H3 (Ungeordnete Reihen) (1 Punkt)

Sei I eine beliebige nicht leere Menge, $\mathscr{P}_0(I)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von I und $(x_i)_{i\in I}$ eine durch I indizierte Familie reeller Zahlen. Wir definieren: Die ungeordnete Reihe $\sum_{i\in I} x_i$ konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $A_0 \in \mathscr{P}_0(I)$ existiert mit

$$\left| x - \sum_{i\in A} x_i \right| < \varepsilon$$

für jede Teilmenge $A \in \mathscr{P}_0(I)$ mit $A_0 \subseteq A$. Wir schreiben in diesem Fall $\sum_{i\in I} x_i = x$ und sagen, dass $(x_i)_{i\in I}$ ungeordnet summierbar ist.

Analog schreiben wir $\sum_{i\in I} x_i = \infty$ und sagen, dass die ungeordnete Reihe gegen ∞ divergiert, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Für jede reelle Zahl $C \in \mathbb{R}$ existiert eine endliche Menge $A_0 \in \mathscr{P}_0(I)$, so dass für alle endlichen Mengen $A \in \mathscr{P}_0(I)$ mit $A_0 \subseteq A$ gilt:

$$\sum_{i\in A} x_i \geq C.$$

Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Die ungeordnete Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$ ist weder konvergent noch gegen ∞ divergent.

(b) Sei $\sum_{i\in I} x_i = x$, sei $\sum_{i\in I} y_i = y$ und sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist auch $(x_i + c \cdot y_i)_{i\in I}$ ungeordnet summierbar und es gilt $\sum_{i\in I}(x_i + c\cdot y_i) = x + c \cdot y$. Insbesondere bilden für eine feste Indexmenge ungeordnet summierbare Familien einen Vektorraum.

(c) Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie reeller Zahlen mit $x_i \geq 0$ für alle $i \in I$. Dann ist $(x_i)_{i\in I}$ entweder ungeordnet summierbar oder divergent gegen ∞.

(d*) Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ ist genau dann ungeordnet summierbar, wenn auch $(|x_i|)_{i\in I}$ ungeordnet summierbar ist.

Erinnerung

Sei Ω eine Menge. Eine Teilmenge $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ heißt Algebra über Ω, falls folgende Axiome erfüllt sind:

(A1) Es gilt $\emptyset \in \mathscr{A}$.

(A2) Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $A^C \in \mathscr{A}$.

(A3) Sind $A, B \in \mathscr{A}$, so gilt auch $A \cup B \in \mathscr{A}$.

Aufgabe H4 (Algebren und Mengenalgebren) (1 Punkt)

Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ eine Algebra. Sei weiter $\mathbb{K}$ der Körper mit 2 Elementen. Wir definieren

$$\mathscr{B} := \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K}),$$

die Algebra aller Funktionen von Ω nach $\mathbb{K}$ mit punktweiser Addition und Multiplikation, sowie kanonischer skalarer Multiplikation $0.f = 0$ und $1.f = f$.
Wir definieren nun eine Abbildung $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ durch

$$\Phi(A) := \chi_A,$$

wobei χ_A die charakteristische Funktion von A bezeichnet: Es gilt

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in A^C. \end{cases}$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(a) $\Phi(A \triangle B) = \Phi(A) + \Phi(B)$.

(b) $\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cdot \Phi(B)$.

(c) $\Phi(\Omega)$ ist das Einselement in $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$.

(d) Die Abbildung Φ ist injektiv.

(e) Gilt $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, so ist die Abbildung Φ sogar bijektiv.

Somit ist $\Phi(\mathscr{A})$ eine unitale Unteralgebra von $\mathscr{B}$ und Mengenalgebren über Ω entsprechen bijektiv den unitalen Unteralgebren von $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$.
Notation: Es bezeichnet $A \triangle B$ die symmetrische Differenz von A und B. Für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ setzen wir $\operatorname{supp}(f) := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$.

Aufgabe H5 (Zusatzaufgabe: Algebren und σ-Algebren)

Finden Sie eine Mengenalgebra $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, die keine σ-Algebra ist.