Klausur „Lineare Algebra 1“

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider

SS 2012

Tragen Sie in die nachstehenden Zeilen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.

Name: .... | Matr. Nr.: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	2	2	3	4	5	3	3	22	
erreichte Punktzahl									

Hinweise:

a) Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 90 Minuten.

b) Als Hilfsmittel zur Klausur sind zugelassen: keine.

c) Mobiltelefone sind auszuschalten und in der Tasche zu verstauen.

d) Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis zusammen mir einem Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.

e) **Viel Erfolg!**

1. Aufgabe (2 Punkte)

Es seien X und Y Vektorräume über K.

(a) Geben Sie eine mathematische Definition der *Dimension von* X.

(b) Wie lautet die Dimensionsformel für einen Vektorraumhomomorphismus $\phi \in Hom(X,Y)$.

Lösung:

(a) Ist X endlich erzeugt, dann ist $dim_K X$ die Anzahl Elemente einer Basis von X.
Ist X nicht endlich erzeugt, dann ist $dim_K X = \infty$

(b) dim$X$=dimBildϕ+dimKernϕ=rang(ϕ)+d(ϕ)

2. Aufgabe (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Inverse der reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Signatur der Permutation $\sigma \in S_3$ definiert durch

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(b) Inversionen von σ : (1,2), (1,3) $\Rightarrow$ sgn(σ)=1

3. Aufgabe (3 Punkte)

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $(L)\; Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme durch eine Rechnung die Lösungsmenge von (L).

Lösung: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - 2x_3$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - 3x_3 - 2 + 4x_3 = 1 + x_3$

Lösungsmenge= $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} | x_3 \in \mathbf{R}\}$

4. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachte $\phi \in Hom(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ definiert durch

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := x_1 + 2x_2 + 3x_3.$$

(a) (1P) Bestimmen Sie die Dimension von Kern ϕ.

(b) (2P) Bestimmen Sie die Dimension von Kern $\phi \cap U$, wobei

$$U := span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) (1P) Bestimmen Sie einen Untervektorraum W von $\mathbf{R}^3$ mit $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

Alle Antworten sind zu begründen, etwa durch eine Rechnung.

Lösung:

(a) Dimensionsformel: 3=Rangϕ+dimKernϕ

$\phi \neq 0 \Rightarrow$ Rang$\phi = 1 \Rightarrow$ dimKern$\phi = 2$

(b) $\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 1 + 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow U \nsubseteq$ Kernϕ

Dimensionsformel: dim($U \cap$Kernϕ)=dim$U$+dimKernϕ-dim(U+Kernϕ)

$U \nsubseteq$ Kern$\phi \Rightarrow U$+Kern$\phi = \mathbf{R}^3 \Rightarrow$ dim($U \cap$Kernϕ)=2+2-3=1.

dim$U$=2, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear unabh.

(c) W :=span$\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

det $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ =1

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Basis von $\mathbf{R}^3$

$\Rightarrow U + W = \mathbf{R}^3$ und $U \cap W = 0$

5. Aufgabe (5 Punkte)

Betrachte $\phi \in Hom(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^4)$ definiert durch

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

(a) (1P) Bestimmen Sie die Spur von ϕ.

(b) (2P) Bestimmen Sie eine Basis von Kern ϕ.

(c) (2P) Bestimmen Sie eine Basis von Bild ϕ.

Alle Antworten sind zu begründen, etwa durch eine Rechnung.

Lösung:

(a) $\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{tr}(\phi) = 2$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$

$\mathrm{Rang}\phi = 3 \Rightarrow \dim\mathrm{Kern}\phi = 1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}\phi \Rightarrow \mathrm{Kern}\phi = \mathrm{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\mathrm{Rang}\phi = 3$

$\mathrm{Bild}\phi = \mathrm{span}(\phi(e_1), \phi(e_2), \dots, \phi(e_4),) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Wegen $\mathrm{Rang}\phi = 3$ ist dies auch eine Basis!

6. Aufgabe (3 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und U, W seien Untervektoräume von V mit $W \subseteq U$. Man zeige:

(a) (1P) $U/W := \{u + W : u \in U\}$ ist ein Untervektorraum von V/W.

(b) (2P) $(V/W)/(U/W)$ ist isomorph zu V/U.

Lösung:

(a) Sei λ, $\mu \in K$ und $u_1 + W$, $u_2 + W \in U/W$

$\Rightarrow \lambda(u_1 + W) + \mu(u_2 + W) = (\lambda u_1 + \mu u_2) + W \in U/W$, denn $\lambda u_1 + \mu u_2 \in U$, da U UVR ist.

$\Rightarrow U/W$ ist UVR.

(b) Betrachte $\varphi : V/W \to V/U$ mit $\varphi(v+W) = v+U$

Zeige φ ist wohldefiniert:

Sei $v_1 + W = v_2 + W \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W \subseteq U$

$\Rightarrow v_1 + U = v_2 + U$, denn $v_1 - v_2 \in U$

Kernφ: $\varphi(v+W) = 0 \Leftrightarrow v + U = 0 + U \Leftrightarrow v \in U$, d.h. Kern$\varphi$=$U/W$

Homomorphisatz $\Rightarrow (V/W)/(U/W)$ ist isomorph zu V/U

φ ist offenbar surjektiv.

7. Aufgabe (3 Punkte)

Man betrachte in $\mathbf{R}^3$

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(a) (1P) Man zeige, dass C eine Basis von $\mathbf{R}^3$ ist.

(b) (2P) Man bestimme durch eine Rechnung die Übergangsmatrizen $[id]_C^B$ und $[id]_B^C$.

Lösung:

(a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Basis.

(b) $[id]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$[id]_C^B = [[id]_B^C]^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\Rightarrow [id]_C^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$