Lineare Algebra
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

28.06.2012

Gruppenübung

Aufgabe G43 (Lineare Abbildung)
Betrachten Sie die folgende Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Welche davon sind linear? Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Matrix $[\phi]$ (bezüglich der Standardbasen).

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + 3y \\ -2z \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yx \\ zx \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |x| \\ |x| \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x-1)^2 + 3z - (x+1)^2 \\ \sqrt{4(z+1)^2 + (2z-2)^2 - 8} \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Ja. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) Nein. $\phi(1,1,1) = (1,1)$ und $\phi(2,2,2) = (4,4) \neq 2 \cdot (1,1)$

(c) Nein. $\phi(0,0,0) = (1,0) \neq (0,0)$

(d) Ja. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) Nein. $\phi(1,0,0) = (1,0) = \phi(-1,0,0) \neq -(1,0)$

(f) Ja. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe G44 (Basiswechsel)
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und die Standardbasen

$$E_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } E_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$[\psi]_B^C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $[\psi]_{E_2}^{E_3}$.

(b) Gegeben sei weiterhin ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{E_3} := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestimme $[\psi(v)]_B$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$[\psi]_{E_2}^{E_3} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{E_2}^B \cdot [\psi]_B^C \cdot [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_C^{E_3} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{E_2}^B \cdot [\psi]_B^C \cdot \left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^C \right)^{-1}.$$

Aus der Gestalt der Basen ergibt sich sofort

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{E_2}^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der letzten Matrix bestimmt man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I+II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II-I,\, III+1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I+II,\, III\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{I-III,\, II+III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

D.h. es gilt

$$\left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^C \right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der ersten Formel ergibt sich also

$$[\psi]_{E_2}^{E_3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$[\psi(\vec{v})]_B = [\psi]_B^C [\vec{v}]_C \qquad \text{und} \qquad [\vec{v}]_C = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_C^{E_3} [\vec{v}]_{E_3} = \left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^C \right)^{-1} [\vec{v}]_{E_3}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} [\psi(\vec{v})]_B &= [\psi]_B^C \left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^C \right)^{-1} [\vec{v}]_{E_3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 74 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 60 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H34 (Matrizen linearer Abbildungen bezüglich verschiedener Basen)

(a) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^2$ und eine Basis C von $\mathbb{R}^2$, sodass die Matrix $[\varphi_1]_C^B$ der Abbildung bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix ist.

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie eine Basis D von $\mathbb{R}^3$ und eine Basis F von $\mathbb{R}^4$, sodass die Matrix $[\varphi_1]_F^D$ der Abbildung bezüglich dieser Basen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

Hinweis: In der Vorlesung wurde ein Satz bewiesen, der aussagt, dass man zu jeder linearen Abbildung Basen findet, so dass die zugehörige Matrix die Identität eventuell ergänzt um einige Nullzeilen und/oder Nullspalten ist.

Lösung:

(a) Es gilt $\varphi_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\varphi_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Man setzt nun

$$\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ bzw. $\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$ sind offensichtlich linear unabhängig. D.h. $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ und $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ sind Basen von $\mathbb{R}^2$. Wegen $\varphi_1(\vec{b}_1) = \vec{c}_1$ und $\varphi_1(\vec{b}_2) = \vec{c}_2$ gilt

$$[\varphi_1]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

D.h. die gesuchten Basen sind gefunden.

(b) Es besteht F aus einer Basis des Bildes von φ_2 ergänzt zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ und D aus einer Basis des Kerns von φ_2 zusammen mit je einem Urbild der Basisvektoren von $\operatorname{im}\varphi_2$ aus F.

Das Bild von φ_2 wird von den Vektoren

$$\vec{f}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{f}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Die zugehörigen Urbilder sind offensichtlich

$$\vec{d}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Außerdem sieht man sofort, dass $\ker \varphi_2 = \{\vec{0}\}$ gilt und der Vektor

$$\vec{f}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Vektoren $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ zu einer Basis ergänzt.
Man setzt nun also

$$D := (\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3) \text{ und } F := (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4)\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \varphi_2(\vec{d}_1) &= 1 \cdot \vec{f}_1 + 0 \cdot \vec{f}_2 + 0 \cdot \vec{f}_3 + 0 \cdot \vec{f}_4 \\ \varphi_2(\vec{d}_2) &= 0 \cdot \vec{f}_1 + 1 \cdot \vec{f}_2 + 0 \cdot \vec{f}_3 + 0 \cdot \vec{f}_4 \\ \varphi_2(\vec{d}_3) &= 0 \cdot \vec{f}_1 + 0 \cdot \vec{f}_2 + 1 \cdot \vec{f}_3 + 0 \cdot \vec{f}_4 \end{aligned}$$

folgt

$$[\varphi_1]^D_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D.h. die gesuchten Basen sind gefunden.

Aufgabe H35 (Basiswechsel) (5 Punkte)

$\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ bezeichne wie gewöhnlich die Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich n.
Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \varphi(p)(x) := xp(x),$$

die Elemente $p_i(x) := x^i$, $q_i(x) := (x+1)^i$ für $i = 0, 1, \ldots, 3$ und die Basen

$$\begin{aligned} B &:= (p_0, p_1, p_2), \\ C &:= (p_0, p_1, p_2, p_3), \\ C' &:= (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ bzw. von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie $[\varphi]^B_C$ und $[\varphi]^B_{C'}$.

Lösung:

Um $[\varphi]^B_C$ zu bestimmen, betrachten wir die Bilder der Basisvektoren aus B unter φ. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(p_0) &= p_1 \\ \varphi(p_1) &= p_2 \\ \varphi(p_2) &= p_3. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$[\varphi]^B_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $[\varphi]^B_{C'} = [\mathrm{id}]^C_{C'} [\varphi]^B_C$. Außerdem ist die Matrix $[\mathrm{id}]^C_{C'}$ gleich der zu $[\mathrm{id}]^{C'}_C$ Inversen Matrix. Um $[\mathrm{id}]^{C'}_C$ zu berechnen, stellen wir die Elemente von C' bzgl. der Basis C dar.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ (x+1) &= 1 + x \\ (x+1)^2 &= 1 + 2x + x^2 \\ (x+1)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Also gilt

$$[\mathrm{id}]_C^{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse dieser Matrix bestimmt man wie folgt mittels des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I+III,\, II-2\cdot III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I-IV,\, II+3\cdot IV,\, III-3\cdot IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es ergibt sich also

$$[\mathrm{id}]_{C'}^{C} = \left([\mathrm{id}]_C^{C'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. es gilt

$$[\varphi]_{C'}^{B} = [\mathrm{id}]_{C'}^{C} [\varphi]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$