Lineare Algebra
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

21.06.2012

Gruppenübung

Aufgabe G40 (Rang)
Es seien A und B reelle $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie dass

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$$

gilt.

Lösung:
Wir betrachten die drei Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n, & \vec{x} &\mapsto A\vec{x}\,, \\ \varphi_B : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n, & \vec{x} &\mapsto B\vec{x} \text{ und} \\ \varphi_{AB} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n, & \vec{x} &\mapsto AB\vec{x}\,. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$.

Des Weiteren gilt für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ bekanntermaßen $\dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim V$ und damit insbesondere $\dim(\operatorname{im}\varphi) \leq \dim V$.

Zusammen ergibt sich

$$\operatorname{rank}(AB) = \dim(\operatorname{im}\varphi_{AB}) = \dim(\operatorname{im}\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim\left(\operatorname{im}(\varphi_A|_{\operatorname{im}\varphi_B})\right) \leq \dim(\operatorname{im}\varphi_B) = \operatorname{rank} B\,.$$

Aufgabe G41 (Rang von Matrizen und Lösungen von Gleichungssystemen)
Gegeben seien die drei Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrizen A, B und C und die Dimension des Kerns der zu diesen Matrizen gehörigen linearen Abbildungen φ_A, φ_B und φ_C.

(b) Es sei D eine reelle $m \times n$-Matrix und $U := \ker \varphi_D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid D\vec{x} = \vec{0}\}$ der Kern der zugehörigen linearen Abbildung. Zeigen Sie dass für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $D\vec{x} = \vec{b}$ entweder leer ist oder die Gestalt $\vec{a} + U$ mit einem $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ hat.

(c) Wir betrachten die linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{a}$, $B\vec{x} = \vec{b}$ und $C\vec{x} = \vec{c}$. Ein solches lineares Gleichungssystem ist unlösbar oder es hat genau eine Lösung oder die Lösungsmenge ist eine Gerade, oder eine Ebene, oder ein dreidimensionales Gebilde, ...

Welche Fälle sind in obigen Gleichungssystemen jeweils möglich? Gib in den Fällen, die möglich sind, jeweils eine rechte Seite an, für die dieser Fall eintritt. Begründe in den übrigen Fällen, warum er jeweils nicht eintreten kann.

Lösung:

(a) Der Rang einer Matrix ergibt sich aus der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen. Das lässt sich hier jeweils direkt ablesen:

$$\operatorname{rank} A = 1, \operatorname{rank} B = 3, \operatorname{rank} C = 3$$

Durch Anwenden des Dimensionssatzes

$$\dim(\operatorname{im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim V$$

für alle linearen Abbildungen $\varphi : V \to W$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\dim(\ker\varphi_A) &= 4 - \operatorname{rank} A = 4 - 1 = 3\\
\dim(\ker\varphi_B) &= 4 - \operatorname{rank} B = 4 - 3 = 1\\
\dim(\ker\varphi_C) &= 3 - \operatorname{rank} C = 3 - 3 = 0\,.
\end{aligned}$$

(b) Entweder die Lösungsmenge ist leer, oder es gibt ein $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $D\vec{a} = \vec{b}$. Im ersten Fall ist nichts zu zeigen. Wir betrachten also den zweiten Fall.

Jedes Element aus $\mathbb{R}^n$ hat die Gestalt $\vec{a} + \vec{x}$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und ist genau dann eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, wenn

$$\vec{b} = D(\vec{a} + \vec{x}) = D\vec{a} + D\vec{x} = \vec{b} + D\vec{x} \Leftrightarrow D\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in U$$

gilt. D.h. die Lösungsmenge von $D\vec{x} = \vec{b}$ hat die Gestalt $\{\vec{a} + \vec{x} \mid \vec{x} \in U\} = \vec{a} + U$.

(c) Wegen (a) und (b) ist die Lösung das Systems $A\vec{x} = \vec{a}$ entweder leer oder ein dreidimensionales Gebilde, da $\dim(\ker\varphi_A) = 3$ gilt. Das System ist allerdings für jede rechte Seite lösbar:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_4 = \vec{b}$$

ist zum Beispiel für $\vec{x} = (\vec{b}, 0, 17, 0)^T$ erfüllt. Damit kann nur der Fall eintreten, dass die Lösungsmenge etwas dreidimensionales ist.

Wegen (a) und (b) ist die Lösung das Systems $B\vec{x} = \vec{b}$ entweder leer oder eine Gerade, denn es gilt $\dim(\ker\varphi_B) = 1$. Beide Fälle treten auf, so ist das System für $\vec{b} = (0,0,0,0,0)^T$ lösbar (eine Lösung ist $\vec{x} = (0,0,0,0)^T$) und für $\vec{b} = (0,0,0,0,1)^T$ unlösbar, denn aus der letzten Zeile des LGS ergibt sich dann $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$.

Wegen (a) und (b) ist das System entweder unlösbar oder eindeutig lösbar, denn $\ker(\varphi_C) = \{\vec{0}\}$. Unlösbarkeit kann jedoch wieder nicht auftreten, denn wegen $\dim(\operatorname{im}\varphi_C) = \operatorname{rank} C = 3$ liegt jedes Element aus $\mathbb{R}^3$ im Bild von φ_C. Das bedeutet, das lineare Gleichungssystem $\vec{C}x = \vec{c}$ ist für alle $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ lösbar.

Aufgabe G42 (Matrizen und lineare Abbildungen)
Betrachten Sie die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sind die zugehörigen linearen Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Zeigen Sie ihre Behauptungen.

Lösung:

Die erste und die letzte Spalte von A_1 sind Vielfache voneinander. Man zeigt leicht, dass die ersten drei Spalten linear unabhängig sind. D.h. die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A_1 ist drei. Also gilt

$$\operatorname{rank} A_1 = \dim(\operatorname{im}\varphi_{A_1}) = 3\,.$$

Die Abbildung φ_{A_1} hat die Gestalt

$$\varphi_{A_1} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\,.$$

D.h. da $\dim(\operatorname{im}\varphi_{A_1}) = 3 = \dim\mathbb{R}^3$ gilt, ist φ_{A_1} surjektiv.

Außerdem gilt

$$\dim(\ker\varphi_{A_1}) = \dim\mathbb{R}^4 - \dim(\operatorname{im}\varphi_{A_1}) = 4 - 3 = 1 \neq 0\,,$$

d.h. φ_{A_1} ist nicht injektiv. Es folgt, dass φ_{A_1} nicht bijektiv ist.

Die letzte Zeile von A_2 ist ein Vielfaches der ersten. Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0\,.$$

Das bedeutet die ersten drei Zeilen von A_2 sind linear unabhängig. D.h. die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A_2 ist drei. Also gilt

$$\operatorname{rank} A_2 = \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_2}) = 3\,.$$

Die Abbildung φ_{A_2} hat die Gestalt

$$\varphi_{A_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\,.$$

D.h. da $\dim(\operatorname{im} \varphi_{A_2}) = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$ gilt, ist φ_{A_2} nicht surjektiv.

Außerdem gilt

$$\dim(\ker \varphi_{A_2}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_2}) = 3 - 3 = 0\,,$$

d.h. φ_{A_2} ist injektiv. Es folgt, dass φ_{A_2} nicht bijektiv ist.

Die erste und dritte Spalte bzw. die zweite und vierte Spalte von A_3 sind Vielfache voneinander. Außerdem sieht man sofort, dass die ersten beiden Spalten von A_3 linear unabhängig sind. D.h. die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A_3 ist zwei. Also gilt

$$\operatorname{rank} A_3 = \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_3}) = 2\,.$$

Die Abbildung φ_{A_3} hat die Gestalt

$$\varphi_{A_3} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\,.$$

D.h. da $\dim(\operatorname{im} \varphi_{A_3}) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ gilt, ist φ_{A_3} nicht surjektiv.

Außerdem gilt

$$\dim(\ker \varphi_{A_3}) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_3}) = 4 - 2 = 2 \neq 0\,,$$

d.h. φ_{A_3} ist nicht injektiv. Es folgt, dass φ_{A_3} nicht bijektiv ist.

Die Matrix A_4 ist bereits in Stufenform, d.h. die Zeilen sind linear unabhängig und es ergibt sich

$$\operatorname{rank} A_4 = \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_4}) = 3\,.$$

Die Abbildung φ_{A_4} hat die Gestalt

$$\varphi_{A_4} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,.$$

D.h. da $\dim(\operatorname{im} \varphi_{A_4}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ gilt, ist φ_{A_4} surjektiv.

Außerdem gilt

$$\dim(\ker \varphi_{A_4}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_4}) = 3 - 3 = 0\,,$$

d.h. φ_{A_4} ist injektiv. Es folgt, dass φ_{A_4} bijektiv ist.

Hausübung

Aufgabe H32 (Bewegungen im $\mathbb{R}^2$) (5 Punkte)

Als Bewegung im $\mathbb{R}^2$ werden Spiegelungen, Drehungen und beliebige Zusammensetzungen von Spiegelungen und Drehungen bezeichnet. Drehungen um den Koordinatenursprung in $\mathbb{R}^2$ und Spiegelungen an einer Gerade durch den Koordinatenursprung sind lineare Abbildungen.

(a) Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Matrix A an, sodass $\varphi = \varphi_A$ die Multiplikation mit A ist. Stellen Sie einige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und ihre Bilder unter φ graphisch dar. Welche Bewegung im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Abbildung beschrieben?

(b) Es sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Matrix A_α an, sodass $\varphi_\alpha = \varphi_{A_\alpha}$ die Multiplikation mit A_α ist. Stellen Sie einige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und ihre Bilder unter φ graphisch dar. Welche Bewegung im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Abbildung beschrieben?

(c) Es sei χ_1 die Abbildung, welche die Spiegelung an der x_1-Achse beschreibt. Geben Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für χ_1 an (in der Form, wie sie in den Aufgabenteilen (a) und (b) gegeben ist). Bestimmen Sie weiterhin eine Matrix B_1 mit $\chi_1 = \varphi_{B_1}$.

(d) Es sei χ_2 die Abbildung, welche die Spiegelung an Gerade $x_1 = x_2$ beschreibt. Geben Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für χ_2 an. Bestimmen Sie weiterhin eine Matrix B_2 mit $\chi_2 = \varphi_{B_2}$.

(e) Berechenen Sie $\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1$ auf zwei Arten:

  (1) Setzen Sie die expliziten Abbildungsvorschriften ineinander ein

  (2) Multiplizieren Sie die zu den Abbildungen gehörigen Matrizen in der richtigen Reihenfolge. Die zu der entstehenden Matrix gehörige Abbildung ist dann die gesuchte Zusammensetzung.

Ergeben beide Wege wirklich dasselbe Ergebnis? Welche der Abbildungen aus den vorherigen Aufgaben ist diese Zusammensetzung?

Lösung:

(a) Die gesuchte Matrix A ist offensichtlich

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Abbildung linear ist reicht es sich die Bilder der Standardbasisvektoren

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

unter φ zu überlegen. Man erkennt, dass die Abbildung $\vec{e}_1$ auf $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_2$ auf $-\vec{e}_1$ abbildet. Durch die graphische Darstellung sieht man, dass es sich bei φ um eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um den Ursprung (in mathematisch positiver Richtung) handelt. (Die gesamte Abbildung muss diese Drehung sein, da sowohl Drehung, als auch φ linear sind, und eine lineare Abbildung durch die Bilder einer Basis eindeutig bestimmt ist.)

(b) Die gesuchte Matrix A ist offensichtlich

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A_\alpha(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \text{ und } A_\alpha(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Grafisch, bzw. unter Verwendung der bekannten Formel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ und der geometrischen Formeln

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \text{ und } \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

erkennt man, dass dies gerade einer Drehung um α um den Koordinatenursprung (in mathematisch positiver Richtung) ist.

(c) Es gilt offensichtlich $\chi_1(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ und $\chi_1(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$. Aus der Linearität von χ_1 ergibt sich dann

$$\chi_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \chi_1(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2) = x_1\chi_1(e_1) + x_2\chi_1(e_2) = x_1 \cdot e_1 - x_2 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} .$$

D.h. die explizite Abbildungsvorschrift ist

$$\chi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} .$$

Die zugehörige Matrix B_1 ist

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(d) Anschaulich erkennt man, dass $\chi_2(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$ und $\chi_2(\vec{e}_2) = \vec{e}_1$ gilt. Aus der Linearität von χ_2 ergibt sich dann

$$\chi_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \chi_2(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2) = x_1\chi_1(\vec{e}_1) + x_2\chi_1(\vec{e}_2) = x_1 \cdot \vec{e}_2 + x_2 \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} .$$

D.h. die explizite Abbildungsvorschrift ist

$$\chi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} .$$

Die zugehörige Matrix B_2 ist

$$B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

(e) (1) Man berechnet explizit

$$(\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi_{\frac{\pi}{2}}\left(\chi_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi_{\frac{\pi}{2}}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} .$$

D.h. es gilt

$$\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} .$$

(2) Die Multiplikation der entsprechenden Matrizen ergibt

$$A_{\frac{\pi}{2}} \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

D.h. es gilt

$$\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Offensichtlich stimmen die Ergebnisse unter (1) und (2) überein. Außerdem erkennt man, dass

$$\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1 = \chi_2$$

gilt.

Aufgabe H33 (Duale Räume)
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Außerdem sei

$$q : V \to V/W, \qquad \vec{v} \mapsto \vec{v} + W$$

die natürliche Abbildung in den Quotientenraum. Wir betrachten die dualen Räume

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \text{ und } (V/W)^* = \mathrm{Hom}(V/W, \mathbb{K}) .$$

(Der duale Raum zu einem Vektorraum ist immer die Menge aller linearen Abbildungen von dem Vektorraum nach $\mathbb{K}$. Dies ist wieder ein Vektorraum.) Gegeben sei weiterhin die Abbildung

$$q^* : (V/W)^* \to V^*, \qquad l \mapsto l \circ q .$$

Man beachte: in dieser Schreibweise ist l eine Abbildung von V/W nach $\mathbb{K}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* injektiv ist.

(d) Aus den bisherigen Aufgabenteilen folgt, dass $\operatorname{im} q^* = q^*((V/W)^*)$ ein Untervektorraum von V^* ist. D.h. der Vektorraum $V^*/q^*((V/W)^*)$ ist definiert.
Im Spezialfall von $V = \mathbb{K}^n$ gilt

$$\dim V^* = \dim V.$$

Diese Aussage ist für alle endlichdimensionalen Vektorräume richtig.
Wie groß ist die Dimension von $V^*/q^*((V/W)^*)$?

Lösung:

(a) Wenn $l \in (V/W)^*$ ist, dann ist l eine lineare Abbildung von V/W nach $\mathbb{K}$. Da q eine lineare Abbildung von V nach V/W ist, ist $l \circ q$ eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{K}$, also ein Element von V^*. D.h. die Abbildung q^* ist wohldefiniert.

(b) Für $l_1, l_2 \in (V/W)^*, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ und $\vec{v} \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
(q^*(\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2))(\vec{v}) &= ((\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2) \circ q)(\vec{v}) = (\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2)(q(\vec{v})) = \lambda_1(l_1(q(\vec{v}))) + \lambda_2(l_2(q(\vec{v}))) \\
&= \lambda_1(l_1 \circ q)(\vec{v}) + \lambda_2(l_2 \circ q)(\vec{v}) = (\lambda_1 q^*(l_1) + \lambda_2 q^*(l_2))(\vec{v}) \\
\Rightarrow q^*(\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2) &= \lambda_1 q^*(l_1) + \lambda_2 q^*(l_2)\,.
\end{aligned}$$

D.h. q^* ist $\mathbb{K}$-linear.

(c) Angenommen, es gibt $l_1, l_2 \in (V/W)^*$ mit $q^*(l_1) = q^*(l_2)$. Dann gilt auch

$$\begin{aligned}
l_1 \circ q &= l_2 \circ q \\
\Rightarrow (l_1 \circ q)(\vec{v}) &= (l_2 \circ q)(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V \\
\Rightarrow l_1(q(\vec{v})) &= l_2(q(\vec{v})) \quad \forall \vec{v} \in V \\
\Rightarrow l_1(\vec{v} + W) &= l_2(\vec{v} + W) \quad \forall \vec{v} + W \in V/W \\
\Rightarrow l_1 = l_2\,.
\end{aligned}$$

D.h. q^* ist injektiv.

(d) Durch Anwenden von bekannten Dimensionsformeln erhält man

$$\begin{aligned}
\dim\left(V^*/q^*((V/W)^*)\right) &= \dim V^* - \dim\left(q^*((V/W)^*)\right) = \dim V - \left(\dim(V/W)^* - \dim(\ker q)\right) \\
&= \dim V - \dim(V/W) = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W\,.
\end{aligned}$$