Lineare Algebra
10. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

14.06.2012

Gruppenübung

Aufgabe G36
Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right), \quad \ker f = \operatorname{span}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Lösung:
Angenommen, es gibt eine solche lineare Abbildung f. Dann wäre $\dim \operatorname{im} f = 2$, da die beiden Vektoren im Spann linear unabhängig sind und $\dim \ker f = 1$. Nach dem Dimensionssatz muss gelten: $4 = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = 2 + 1 = 3$, was den gewünschten Widerspruch liefert.

Aufgabe G37
Seien $U \subseteq V$ und $X \subseteq W$ vier $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und die Abbildung $F : V/U \to W/X$ definiert durch $\vec{v} + U \mapsto f(\vec{v}) + X$. Zeigen Sie, dass F wohldefiniert ist, genau dann, wenn $f(U) \subseteq X$ gilt.

Lösung:

- Angenommen, dass F wohldefiniert ist. Sei $\vec{u} \in U$. Wegen $\vec{v} + U = \vec{v} + \vec{u} + U$ folgt $f(\vec{v}) + X = f(\vec{v} + \vec{u}) + X$, weil F wohldefiniert ist. Somit $f(\vec{v}) - f(\vec{v} + \vec{u}) = f(\vec{u}) \in X$.
- Angenommen, dass $f(U) \subseteq X$. Sei $\vec{y} \in \vec{v} + U$. Es gilt $\vec{y} = \vec{v} + \vec{u}$ mit $\vec{u} \in U$. Daraus folgt $f(\vec{y}) = f(\vec{v} + \vec{u}) = f(\vec{v}) + f(\vec{u}) \in f(\vec{v}) + X$. Somit $f(\vec{y}) + X = f(\vec{v}) + X$, d.h. F ist wohldefiniert.

Aufgabe G38 (Kanonische Faktorisierung)
Es sei V ein Vektorraum. Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: V \to V, \qquad \vec{v} \mapsto \vec{v} \text{ und} \\ \varphi_2 &: V \to V, \qquad \vec{v} \mapsto \vec{0}. \end{aligned}$$

Mittels des Homomorphiesatzes ergibt sich die Existenz von zwei Isomorphismen $\overline{\varphi_1}$ und $\overline{\varphi_2}$, die durch φ_1 bzw. φ_2 eindeutig bestimmt sind.

(a) Geben Sie die Abbildungsvorschrift von $\overline{\varphi_1}$ und $\overline{\varphi_2}$ an.

(b) Die Isomorphie welcher Vektorräume kann man daraus schließen?

Lösung:

(a) Offensichtlich gilt $\ker \varphi_1 = \{\vec{0}\}$, $\operatorname{im} \varphi_1 = V$, $\ker \varphi_2 = V$ und $\operatorname{im} \varphi_2 = \{\vec{0}\}$. Aus dem Homomorphiesatz ergeben sich direkt die Abbildungsvorschriften:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1} &: V/\{\vec{0}\} \to V, \qquad \vec{v} + \{\vec{0}\} \mapsto \varphi_1(\vec{v}) = \vec{v} \\ \overline{\varphi_2} &: V/V \to \{\vec{0}\}, \qquad \vec{v} + V \mapsto \varphi_2(\vec{v}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

(b) Es folgt, dass $V/\{\vec{0}\}$ isomorph zu V ist und dass V/V isomorph zu $\{\vec{0}\}$ ist.

Aufgabe G39 (Injektivität und Surjektivität)
Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ersetzen Sie in den folgenden drei Aussagen die Fragezeichen so, dass die Aussagen wahr sind.

(a) φ ist surjektiv $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{im}\varphi) = ?$

(b) φ ist injektiv $\Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) = ?$

(c) φ ist bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = ?$ und $\dim(\ker\varphi) = ?$

Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit ihrer Aussagen.
Betrachten Sie nun den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ der reellen Zahlenfolgen.

(d) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_1 : V \to V$ gibt, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(e) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_2 : V \to V$ gibt, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Lösung:

(a) Es gilt: φ ist surjektiv $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{im}\varphi) = \dim W$.
Beweis:
- Angenommen φ ist surjektiv, dann gilt nach Definition $\mathrm{im}\varphi = W$ und damit auch $\dim(\mathrm{im}\varphi) = \dim W$
- Angenommen, es gilt $\dim(\mathrm{im}\varphi) = \dim W$. Es folgt dann $\mathrm{im}\varphi = W$, d.h. φ ist surjektiv.

(b) φ ist injektiv $\Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) = 0$.
Dies folgt sofort aus den Aussagen:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ ist injektiv} \quad &\Leftrightarrow \quad \ker\varphi = \{\vec{0}\} \text{ und} \\ \dim U = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad U = \{\vec{0}\} \end{aligned}$$

für alle Vektorräume U.

(c) φ ist bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$ und $\dim(\ker\varphi) = 0$
Beweis:
Mit Hilfe der Dimensionsformel $\dim(\mathrm{im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim V$ und den Aufgabenteilen (a) und (b) ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi \text{ ist bijektiv} \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi \text{ ist injektiv und surjektiv } \Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) = 0 \text{ und } \dim(\mathrm{im}\varphi) = \dim W \\ &\Leftrightarrow \quad \dim V = \dim W \text{ und } \dim(\ker\varphi) = 0 \end{aligned}$$

(d) Wir betrachten die Abbildung $\varphi_1 : V \to V$, die definiert ist durch

$$\varphi_1\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } b_1 = 0, b_{i+1} = a_i\ \forall i \in \mathbb{N}\,.$$

Diese Abbildung verschiebt die Folgenglieder um eins nach hinten und ergänzt eine Null als erstes Folgenglied. D.h. φ_1 ist injektiv, denn wenn man zwei verschiedene Zahlenfolgen verschiebt, so sind die Bilder verschieden.
φ_1 ist nicht surjektiv, da jede Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 \neq 0$ nicht im Bild von φ_1 liegt.

(e) Wir betrachten die Abbildung $\varphi_2 : V \to V$, die definiert ist durch

$$\varphi_2\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } b_i = a_{i+1}\ \forall i \in \mathbb{N}\,.$$

Diese Abbildung verschiebt die Folgenglieder um eins nach vorn und "vergisst" das erste Folgenglied.
D.h. φ_1 ist surjektiv, denn für eine beliebige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ gilt für $b_1 := 0, b_{n+1} := a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$:
$\varphi_2\left((b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
φ_2 ist nicht injektiv, denn für $a_n := 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $b_1 := 1, b_{n+1} := 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi_2\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \varphi_2\left((b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Hausübung

Aufgabe H29 (Lineare Abbildungen) (5 Punkte)
Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass es genau dann einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$ gibt, wenn $\dim V = \dim W$ gilt.

(b) Es sei U ein Untervektorraum von V und $\varphi : U \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\widetilde{\varphi} : V \to W$ gibt, für die $\widetilde{\varphi}|_U = \varphi$ gilt.

Lösung:

(a) Angenommen, es gibt einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$. Dann gilt $\operatorname{im}\varphi = W$,da φ surjektiv ist und $\ker\varphi = \{\vec{0}\}$, da φ injektiv ist. Mit der bekannten Dimensionsformel ergibt sich

$$\dim V = \dim(\operatorname{im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim W + \dim\{\vec{0}\} = \dim W\,.$$

Angenommen, es gilt $\dim V = \dim W$. Dann gibt es eine Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von V und eine Basis $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ von W sowiegenau einen Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to W$ mit

$$\varphi(\vec{v}_1) = \vec{w}_1, \ldots, \varphi(\vec{v}_n) = \vec{w}_n\,.$$

Insbesondere existiert also ein Vektorraumisomorphismus von V nach W.

(b) Da U als Untervektorraum von V endlichdimensional ist, gibt es eine Basis $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ von U. Diese kann nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis von V erweitert werden. D.h. es gibt Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$, sodass $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ eine Basis von V bildet. Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$\widetilde{\varphi} : V \to W, \quad \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_m\vec{u}_m + \mu_1\vec{v} + \cdots + \mu_n\vec{v}_n \mapsto \varphi(\lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_m\vec{u}_m)\,.$$

Man kann jedes Element von V eindeutig in der Form $\vec{u}+\vec{v}$ mit $\vec{u} \in U$ und $\vec{v} \in \operatorname{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) =: \widetilde{V}$ darstellen (das folgt aus der Angabe der obigen Basis). Desweiteren gilt $\widetilde{\varphi}(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u})$ für alle $\vec{u} \in U, \vec{v} \in \widetilde{V}$. Daraus ergibt sich sofort

$$\widetilde{\varphi}(\vec{u}) = \varphi(\vec{u})\ \forall\, \vec{u} \in U \Rightarrow \widetilde{\varphi}|_U = \varphi\,.$$

Außerdem gilt für $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \widetilde{V}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(\lambda_1(\vec{u}_1+\vec{v}_1) + \lambda_2(\vec{u}_2+\vec{v}_2)) &= \widetilde{\varphi}((\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2) + (\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2)) = \varphi(\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2) = \lambda_1\varphi(\vec{u}_1)+\lambda_2\varphi(\vec{u}_2)\\
&= \lambda_1\widetilde{\varphi}(\vec{u}_1+\vec{v}_1) + \lambda_2\widetilde{\varphi}(\vec{u}_2+\vec{v}_2)\,.
\end{aligned}$$

D.h. $\widetilde{\varphi}$ ist eine lineare Abbildung und hat damit alle in der Aufgabe geforderten Eigenschaften.

Aufgabe H30 (Fibonacci-Zahlen) (5 Punkte)
Man betrachte $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} | a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$

(a) Man zeige V ist ein $\mathbb{R}-$Vektorraum und bestimme $\dim V$.

(b) Man bestimme $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ derart, dass $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in V$ gilt.

(c) Man zeige $B = \{(q_1^n), (q_2^n)\}$ ist eine Basis von V.

(d) Man bestimme die Koordinaten der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in V$ mit $b_0 = 0, b_1 = 1$ bzgl. B insb. Formel für b_n.

Lösung:

(a) V ist ein $\mathbb{R}$-VR (klar).

Folge $(a_n) \in V$ liegt fest durch die Angabe von a_0 und a_1, d.h. $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(a_n) := \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ ist ein Isomorphismus.

$\Rightarrow\ \dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

(b) $(q^n) \in V \iff q^{n+2} = q^{n+1} + q^n\ \forall n \overset{q\neq 0}{\iff} q^2 = q+1 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. $\Rightarrow$ eine Basis

(d) Nun wissen wir, dass $f_n = a \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + b \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ gilt.
Für $n = 0$ erhalten wir daraus: $0 = a \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + b \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 = a + b$
Für $n = 1$ erhalten wir daraus: $1 = a \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + b \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1$
Dies ist ein LGS. Die Lösung davon lautet: $a = \frac{1}{\sqrt{5}},\ a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
Somit ist $b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n}$

Aufgabe H31 (Homomorphiesatz) (5 Punkte)

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Außerdem sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $U \subseteq \ker\varphi$.

Nach dem Homomorphiesatz existiert dann eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\widetilde{\varphi} : V/U \to W$ mit

$$\varphi = \widetilde{\varphi} \circ q\,,$$

wobei $q : V \to V/U$ die bekannte Quotientenabbildung ist.

(a) Zeigen Sie

$$\ker\widetilde{\varphi} = (\ker\varphi)/U\,.$$

Machen Sie sich dazu als ersten Schritt klar, dass $(\ker\varphi)/U$ existiert und ein Untervektorraum von V/U ist.

(b) Zeigen Sie

$$\mathrm{im}\widetilde{\varphi} = \mathrm{im}\varphi\,.$$

(∗) Zeigen Sie:
Wenn φ surjektiv und $\ker\varphi = U$ ist, dann ist $\widetilde{\varphi}$ ein Isomorphismus.

Lösung:

(a) Da U und $\ker\varphi$ Untervektorräume von V und damit selbst Vektorräume sind und da $U \subseteq \ker\varphi$ gilt, existiert $(\ker\varphi)/U$. Man kann ihn in folgender Weise als Untervektorraum von V/U verstehen:

$$(\ker\varphi)/U = \{\vec{v} + U \mid \vec{v} \in \ker\varphi\} \overset{\text{da } \ker\varphi\subseteq V}{\subseteq} \{\vec{v} + U \mid \vec{v} \in V\} = V/U\,.$$

Es sei $\vec{v} + U$ ein beliebiges Element aus V/U. Dann gilt

$$\widetilde{\varphi}(\vec{v} + U) = \widetilde{\varphi}(p(\vec{v})) = (\widetilde{\varphi} \circ p)(\vec{v}) \overset{\varphi=\widetilde{\varphi}\circ q}{=} \varphi(\vec{v})\,.$$

D.h.

$$\vec{v} + U \in \ker\widetilde{\varphi} \Leftrightarrow \widetilde{\varphi}(\vec{v} + U) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \in \ker\varphi \Leftrightarrow \vec{v} + U \in (\ker\varphi)/U\,.$$

Daraus folgt

$$\ker\widetilde{\varphi} = (\ker\varphi)/U\,.$$

(b) Man verwendet wieder die Gleichung $\widetilde{\varphi}(\vec{v} + U) = \varphi(\vec{v})$ für alle $\vec{v} \in V$ (siehe letzter Aufgabenteil) und erhält

$$\vec{w} \in \mathrm{im}\varphi \Leftrightarrow \exists\vec{v} \in V \text{ mit } \vec{w} = \varphi(\vec{v}) = \widetilde{\varphi}(\vec{v} + U) \Leftrightarrow \exists\vec{v} + U \in V/U \text{ mit } \vec{w} = \widetilde{\varphi}(\vec{v} + U) \Leftrightarrow \vec{w} \in \mathrm{im}\widetilde{\varphi}\,.$$

D.h. es gilt

$$\mathrm{im}\widetilde{\varphi} = \mathrm{im}\varphi\,.$$

(∗) Da $\widetilde{\varphi}$ eine lineare Abbildung ist, muss man nur zeigen, dass sie bijektiv ist.
Da φ surjektiv ist, gilt $\mathrm{im}\varphi = W$. Aus Aufgabenteil (b) folgt dann

$$\mathrm{im}\widetilde{\varphi} = \mathrm{im}\varphi = W$$

und damit ist auch $\widetilde{\varphi}$ surjektiv.
Aus Aufgabenteil (a) folgt

$$\ker\widetilde{\varphi} = (\ker\varphi)/U = U/U = \{\vec{0} + U\}\,.$$

D.h. $\widetilde{\varphi}$ ist injektiv.
Insgesamt folgt, dass $\widetilde{\varphi}$ linear und bijektiv ist und damit auch ein Vektorraumisomorphismus.