Lineare Algebra
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider **11.06.2012**
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

Gruppenübung

Aufgabe G34 (Basis)
In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die linearen Teilräume

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad V := \operatorname{spann}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie je eine Basis von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Lösung:
Da die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind (keiner ist ein Vielfaches des Anderen), bilden sie eine Basis von V.
Der Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$ besteht aus allen Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Man sieht leicht, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Diese bilden somit eine Basis von U.
Der Untervektorraum V besteht aus allen Vektoren der Form

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ -2\lambda \\ 3\lambda + 3\mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Setzen wir dies in die definierende Gleichung für U ein, so erhalten wir

$$0 = (\lambda + 2\mu) - (-2\lambda) + (3\lambda + 3\mu) - \mu = 6\lambda + 4\mu.$$

und somit $\mu = -\frac{3}{2}\lambda$. Damit besteht der Durchschnitt $U \cap V$ aus allen Vektoren der Form

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Eine Basis von $U \cap V$ ist also der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Der Vektorraum $U + V$ wird von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Eine Basis bestimmt man durch das Anwenden des Gauß algorithmus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden also eine Basis von $U + V$.

Aufgabe G35

Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ und zwei weiteren Basen $B' = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ und $B'' = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$, wobei

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{b}_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \vec{b}_2 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{b}_3 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{c}_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, & \vec{c}_2 &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \vec{c}_3 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Der Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Basis B' gegeben durch $[\vec{w}]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{w}$ bezüglich der Basis B.

(b) Der Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Standardbasis B gegeben durch $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich der Basis B'.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ bezüglich der Basis B'.

(d) Bestimme eine Matrix A_1 mit

$$[\vec{u}]_B = A_1 [\vec{u}]_{B'} \ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \, .$$

(e) Bestimme eine Matrix A_2 mit

$$[\vec{u}]_{B'} = A_2 [\vec{u}]_{B''} \ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \, .$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\vec{w} = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 \, .$$

Die Koordinaten von $\vec{w}$ bezüglich B sind also

$$[\vec{w}]_B = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix} \, .$$

(b) Die Koordinaten bzgl. B' haben die Gestalt $[\vec{v}]_{B'} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$ mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3 \, .$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & 2 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem ergibt sich nacheinander $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = 1$ und $\lambda_1 = 1$. D.h. die Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich B' sind

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \, .$$

(c) Es gilt

$$\vec{b}_1 = 1 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3 \, , \quad \vec{b}_2 = 0 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3 \ \text{ und } \ \vec{b}_3 = 0 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2 + 1 \cdot \vec{b}_3 \, .$$

Für die Koordinaten bzgl. B' ergibt sich also

$$[\vec{b}_1]_{B'} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad [\vec{b}_2]_{B'} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad [\vec{b}_3]_{B'} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(d) Es seien $[\vec{u}]_{B'} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$ die Koordinaten von $\vec{u}$ bezüglich der Basis B'. Dann gilt

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3 = \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\\lambda_2+\lambda_3\\\lambda_1+\lambda_3\end{pmatrix} = (\lambda_1+\lambda_2)\vec{e}_1 + (\lambda_2+\lambda_3)\vec{e}_2 + (\lambda_1+\lambda_3)\vec{e}_3 \, .$$

Die Koordinaten bzgl. der Basis B haben dann also die Gestalt

$$[\vec{u}]_B = \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\\lambda_2+\lambda_3\\\lambda_1+\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}[\vec{u}]_{B'} \, .$$

D.h. die gesuchte Matrix ist

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und hat als Spalten die Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$.

(e) Es sei $[\vec{u}]_{B''} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ die Koordinaten von $\vec{u}$ bezüglich der Basis B''. Dann gilt

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{c}_1 + \lambda_2\vec{c}_2 + \lambda_3\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)\vec{e}_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\vec{e}_2 + (3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)\vec{e}_3 \,.$$

Die Koordinaten bzgl. der Basis B haben dann also die Gestalt

$$[\vec{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} [\vec{u}]_{B'} \,.$$

Zusammen mit der letzten Teilaufgabe ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} [\vec{u}]_{B''} = [\vec{u}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\vec{u}]_{B'}$$

D.h. die gesuchte Matrix ist

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Inverse Matrix berechnet man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Es ergibt sich also

$$A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hausübung

Aufgabe H25 (Isomorphismen und Basen) (5 Punkte)

Es seien V und W zwei isomorphe $\mathbb{K}$-Vektorräume. D.h. es existiert ein Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to W$. Weiterhin sei $B \subset V$ eine Basis von V.

Zeigen Sie, dass dann $\varphi(B) := \{\varphi(\vec{v}) \mid \vec{v} \in B\}$ eine Basis von W ist.

Lösung:

Sei $\vec{w} \in W$ beliebig. Da φ bijektiv ist, existiert ein $\vec{v} \in V$ mit $\varphi(\vec{v}) = \vec{w}$. Da B eine Basis von V ist, gibt es Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in B$ mit $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n$. Zusammen ergibt sich

$$\vec{w} = \varphi(\vec{v}) = \varphi(\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n) = \lambda_1 \varphi(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(\vec{v}_n),$$

wobei $\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_n)$ Elemente aus $\varphi(B)$ sind.

D.h. $\varphi(B)$ erzeugt V.

Seien nun $\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_n)$ beliebige Elemente von $\varphi(B)$.

Außerdem seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_1 \varphi(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(\vec{v}_n) = \vec{0}$. Dann folgt

$$\vec{0} = \lambda_1 \varphi(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(\vec{v}_n) = \varphi(\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n).$$

Da φ injektiv ist und $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$, ergibt sich $\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$. Weil $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in B$ und B linear unabhängig ist, folgt daraus

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

D.h. $\varphi(B)$ ist linear unabhängig.

Insgesamt ergibt sich, dass $\varphi(B)$ eine Basis von W ist.

Aufgabe H26 (Der Folgenraum) (5 Punkte)

Es sei $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R} \,\forall\, n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der reellen Zahlenfolgen. Diese bildet mit den Operationen

$$\begin{aligned} + : V \times V \to V, \qquad & \big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und} \\ \cdot : \mathbb{R} \times V \to V, \qquad & \big(\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Ist die Teilmenge $U_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V, \text{ endlich viele der } a_n \text{ sind ungleich Null } \}$ ein Untervektorraum von V? Zeigen Sie ihre Aussage.

(b) Ist die Teilmenge $U_2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V, \text{ endlich viele der } a_n \text{ sind gleich Null } \}$ ein Untervektorraum von V? Zeigen Sie ihre Aussage.

(c) Besitzen U_1 bzw. U_2 eine Basis. Wenn ja, bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U_1 bzw. U_2.

(d) Was ist die Dimension von V?

(e) Bildet die in (c) bestimmte Basis von U_1 auch eine Basis von V?

Lösung:

(a) Offensichtlich ist die Nullfolge ein Element von U_1.

Addiert man zwei Zahlenfolgen aus U_1, so hat die Summe dieser beiden auch nur endlich viele Folgenglieder ungleich Null, ist also wieder in U_1.

Multipliziert man eine Zahlenfolge (a_n) aus U_1 mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda a_n = 0$ genau dann wenn $a_n = 0$ ist. D.h. die Zahlenfolge $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat ebenfalls endlich viele von Null verschiedene Folgenglieder, liegt also in U_1.

Zusammen heißt das: U_1 ist ein Untervektorraum von V.

(b) U_2 ist kein Untervektorraum von V. Denn es sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1, b_n = -1 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$ Elemente aus U_2. Aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Nullfolge und kein Element von U_2.

(c) U_2 ist kein Vektorraum, hat also auch keine Basis.

Wie man leicht sieht, ist die Menge $M = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n = 1 \text{ für genau ein } n \in \mathbb{N}, a_n = 0 \text{ sonst}\}$ eine Basis von U_1.

(d) Es ist $\dim V = \infty$, denn die Menge $M \subset V$ aus dem letzten Aufgabenteil hat unendlich viele Elemente und ist linear unabhängig. Dies ist für endlichdimensionale Vektorräume nicht möglich.

(e) Die in (c) bestimmte Basis von U_1 bildet keine Basis von V, da z.B. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$ keine endliche Linearkombination von Elementen aus der dortigen Basis ist.

Aufgabe H27 (Lineare Abbildungen und lineare Unabhängigkeit)

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Zeigen Sie: Sind die Bilder $\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_n)$ linear unabhängig, so sind auch $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig.

Lösung:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$. Dann gilt wegen der Linearität von φ

$$\vec{0} = \varphi(\vec{0}) = \varphi(\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n) = \lambda_1 \varphi(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(\vec{v}_n) .$$

Wenn $\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)$ linear unabhängig sind, folgt hieraus $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Damit sind auch $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linear unabhängig.

Aufgabe H28

(a) Seien $V = U_1 \oplus U_2$ und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ gibt, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$.

(b) Sei V ein endlicher $\mathbb{K}$-Vektorraum und U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V. Angenommen, für je zwei lineare Abbildungen $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ gilt.

Lösung:

(a) Existenz: Für alle $\vec{x}$ in V, sei $\phi(\vec{x}) := \phi_1(\vec{x}_1) + \phi_2(\vec{x}_2)$, mit $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ und $\vec{x}_1 \in U_1$ und $\vec{x}_1 \in U_2$. ϕ ist linear, wie jetzt gezeigt wird. Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ und $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$, mit $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in U_1$ und $\vec{x}_2, \vec{y}_2 \in U_2$. Es gilt $\vec{x}_1 + \lambda \vec{y}_1 \in U_1$ und $\vec{x}_2 + \lambda \vec{y}_2 \in U_2$, weil U_1 und U_2 Untervektorräume von V sind. $\phi(\vec{x} + \lambda \vec{y}) = \phi_1(\vec{x}_1 + \lambda \vec{y}_1) + \phi_2(\vec{x}_2 + \lambda \vec{y}_2) = \phi_1(\vec{x}_1) + \phi_2(\vec{x}_2) + \lambda \phi_1(\vec{y}_1) + \lambda \phi_2(\vec{y}_2) = \phi(\vec{x}) + \lambda \phi(\vec{y})$.

Eindeutigkeit: Seien $\phi, \phi' : V \to W$ zwei lineare Abbildungen, sodass $\phi|_{U_1} = \phi'|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi'|_{U_2} = \phi_2$ gilt. Für alle $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in U_1 \oplus U_2$, $\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_1) + \phi(\vec{x}_2) = \phi_1(\vec{x}_1) + \phi_2(\vec{x}_2) = \phi_1'(\vec{x}_1) + \phi_2'(\vec{x}_2) = \phi'(\vec{x})$.

(b) Wir zeigen zuerst, dass $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ gilt und dann, dass $U_1 + U_2 = V$ gilt.

($\Leftarrow$) Seien $\phi_1 = 0$ und $\phi_2 = \mathrm{id}$ und ϕ linear, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$ gilt. Sei $\vec{v} \in U_1 \cap U_2$. $\phi(\vec{v}) = \phi_1(\vec{v}) = \vec{0}$ und $\phi(\vec{v}) = \phi_2(\vec{v}) = \vec{v}$. Daraus folgt $\vec{v} = \vec{0}$, d.h. $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$.

($\Rightarrow$) Sei W ein Untervektorraum mit $V = (U_1 + U_2) \oplus W$. (Ein solcher Untervektorraum existiert.) Sei $\phi = 0$ und ϕ' linear, sodass $\phi'|_{U_1+U_2} = 0$ und $\phi'|_W = \mathrm{id}$. (Solche Abbildung existiert wegen der vorige Teilaufgabe.) Wegen der Annahme gilt $\phi = \phi'$, d.h. $W = \{\vec{0}\}$ und $U_1 + U_2 = V$.