Lineare Algebra
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

31.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G29 (Vektorräume über endlichen Körpern)
Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen und V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum.

(a) Wieviele Elemente hat V?

(b) Wieviele geordnete Basen hat V?

(c) Wieviele Basen hat V?

(d) Berechnen Sie die Anzahl der Basen des $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

Lösung:

(a) Wir wählen eine geordnete Basis von V. Diese hat n Elemente.
Jeder Vektor von V hat nun genau eine Darstellung als Linearkombination von Basisvektoren. Für die Koeffizienten gibt es pro Basisvektor q Möglichkeiten.
Also hat V genau q^n Elemente.

(b) Wir können eine geordnete Basis von V konstruieren, indem wir mit einem beliebigen, vom Nullvektor verschiedenen Vektor starten und dann sukzessiv weitere Vektoren dazunehmen, welche noch nicht zum Spann der bislang gewählten Vektoren gehören. Wenn wir auf diese Art n Vektoren ausgewählt haben, so haben wir eine geordnete Basis von V. Diese soeben beschriebene Konstruktion lässt sich auf

$$(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdot\dots\cdot(q^n-q^{n-1})$$

verschiedene Arten durchführen, was somit der Anzahl der verschiedenen geordneten Basen entspricht.

(c) Zu jeder Basis gehören $n!$ geordneten Basen. Also gibt es

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdot\dots\cdot(q^n-q^{n-1})}{n!}$$

verschiedenen Basen.

(d) Die Anzahl der Basen des $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ist

$$\frac{(3^4-1)(3^4-3)(3^4-3^2)(3^4-3^3)}{4!}=\frac{80\cdot 78\cdot 72\cdot 54}{24}=1010880.$$

Aufgabe G30 (Linearkombinationen)
Seien $\vec{a}=(2,-1,0,4)$ und $\vec{b}=(-1,3,2,-1)$. Entscheiden Sie welche der folgenden Vektoren Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind.

(a) $\vec{c}=(3,1,2,5)$

(b) $\vec{d}=(0,5,4,2)$

Lösung:

(a) Das Gleichungssystem $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ hat keine Lösung, deshalb ist $\vec{c}$ keine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(b) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

Aufgabe G31 (Vektoren in $\mathbb{R}^3$)
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linear unabhängig?
(b) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linear unabhängig?
(c) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?
(d) Welche Teilmengen von $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Begründen Sie jeweils ihre Aussagen.

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = 0$. Dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem erhält man nacheinander $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.
$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ist also linear unabhängig.

(b) Es gilt offensichtlich $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - 2\vec{v}_4 = 0$.
$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ ist also nicht linear unabhängig.

(c) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig. Durch den Ansatz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & z \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & -y+z \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccccccc} & & & & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x+y-z \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & -y+z \end{array}$$

Eine Lösung des letzten Gleichungssystems ist

$$\lambda_4 = 0,\ \lambda_3 = \frac{x+y-z}{2},\ \lambda_2 = -y+z+\frac{x+y-z}{2} = \frac{x-y+z}{2},\ \lambda_1 = y - \frac{x+y-z}{2} = \frac{-x+y+z}{2}.$$

D.h. jedes Element aus $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ schreiben. Diese bilden also ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(d) Je drei Vektoren aus $M := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Alle anderen Teilmengen sind keine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Beweis:
Man sieht leicht, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ ist. Diese beiden Vektoren bilden also kein Erzeugendensystem und damit auch keine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Analog ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_4$.Diese beiden Vektoren bilden also auch kein Erzeugendensystem und damit keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Durch vertauschen der Koordinaten erhält man, dass keine zweielementige Teilmenge von M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. Natürlich wird $\mathbb{R}^3$ dann auch nicht von Mengen mit weniger Elementen erzeugt. D.h. jede Teilmenge von M, die Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, muss mindestens drei Elemente haben. Da M selbst wegen Aufgabenteil (b) nicht linear unabhängig ist, muss eine solche Basis aus genau drei Elementen bestehen.

Wir zeigen nun, dass die Mengen $M_1 := \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ und $M_2 := \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_4}\}$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind. Durch Vertauschen der Koordinaten ergibt sich dann, dass alle dreielementrige Teilmengen von M eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Wegen Aufgabenteil (a) ist M_1 linear unabhängig.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \lambda_3\vec{v_4} = 0$. Dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem erhält man nacheinander $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.

M_2 ist also linear unabhängig.

Sei $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus dem Gleichungssystem in Aufgabenteil (c) erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{-x+y+z}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y+z}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x+y-z}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-x+y+z}{2}\,\vec{v_1} + \frac{x-y+z}{2}\,\vec{v_2} + \frac{x+y-z}{2}\,\vec{v_3} \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-x+z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x+y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-x+z)\,\vec{v_1} + (-y+z)\,\vec{v_2} + (x+y-z)\,\vec{v_4}\,.$$

D.h. sowohl M_1 als auch M_2 sind Erzeugendensysteme des $\mathbb{R}^3$.

Damit bilden beide Mengen eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe G32 (Lineare Unabhängigkeit)

Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := e^x, \quad f_2(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := \sin^2 x, \quad f_2(x) := \cos^2 x, \quad f_3(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(c) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := 1, \quad f_2(x) := x, \quad f_3(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie jeweils ihre Behauptungen.

Lösung:

(a) Aus $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \vec{0}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\lambda_1 e^x + \lambda_2 x = 0$. Setzt man hier für x die speziellen Werte 0 und 1 ein, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot e + \lambda_2 \cdot 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $\lambda_1 = 0$. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhält man auch $\lambda_2 = 0$.

Also sind f_1 und f_2 linear unabhängig.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt bekanntlich $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Es ist also

$$f_1 + f_2 - f_3 = \vec{0}\,.$$

D.h. f_1, f_2 und f_3 sind linear abhängig.

(c) Aus $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \vec{0}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 = 0$. Setzt man hier für x die speziellen Werte $0, 1$ und -1 ein, so ergibt sich das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & & = & 0 \\ & \lambda_2 & & = & 0 \\ & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Es gilt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

D.h. f_1, f_2 und f_3 sind linear unabhängig.

Aufgabe G33 (Lineare Unabhängigkeit)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{4} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{3} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{0} \end{pmatrix}$$

im Vektorraum $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ linear abhängig sind.

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3$.

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 5\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Daraus ergibt sich nacheinander $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.

D.h. die drei Vektoren aus der Aufgabe sind linear unabhängig.

(b) Man geht analog zum vorherigen Aufgabenteil vor, allerdings wird jetzt in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gerechnet.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ mit $\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3$.

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & \overline{2}\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \overline{4}\,\lambda_1 & + & \overline{3}\,\lambda_2 & + & \overline{2}\,\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \overline{2}\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \overline{4}\,\lambda_2 & + & \overline{2}\,\lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \overline{2}\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Eine nicht-triviale Lösung dieses Gleichungssystems ist $\lambda_2 = \overline{1}$, $\lambda_1 = \overline{4}$ und $\lambda_3 = \overline{3}$.

D.h. die drei Vektoren aus der Aufgabe sind linear abhängig.

Hausübung

Aufgabe H20 (Direkte Produkte und direkte Summe) (5 Punkte)

(a) Seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, für die $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ gilt.
Zeigen Sie, dass es in dieser Situation einen Vektorraumisomorphismus zwischen $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ und V gibt.

(b) Seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.
Weiter sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $U_i := \{(\underbrace{\vec{0}, \ldots \vec{0}}_{i-1 \text{ mal}}, \vec{v}, \underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{n-i \text{ mal}}) \mid \vec{v} \in V_i\}$.

Zeigen Sie

- U_i ist ein Untervektorraum von V.
- Es gibt einen Vektorraumisomorphismus zwischen U_i und V_i.
- Es gilt $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_3$.

Lösung:

(a) Man betrachte die Abbildung

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V, \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) \mapsto \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n \,.$$

Wegen $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ kann man jedes Element $\vec{v} \in V$ eindeutig als Summe $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n$ mit $\vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2 \ldots, \vec{v}_n \in V_n$ schreiben.
D.h. φ ist bijektiv.
Für $v = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n), \vec{v}' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \ldots, \vec{v}'_n) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\vec{v} + \mu\vec{v}') &= \varphi(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}'_1, \lambda\vec{v}_2 + \mu\vec{v}'_2, \ldots, \lambda\vec{v}_n + \mu\vec{v}'_n) = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}'_1 + \lambda\vec{v}_2 + \mu\vec{v}'_2 + \cdots + \lambda\vec{v}_n + \mu\vec{v}'_n \\
&= \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n) + \mu(\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 + \cdots + \vec{v}'_n) = \lambda\varphi(\vec{v}) + \mu\varphi(\vec{v}') \,.
\end{aligned}$$

Also ist φ linear.
Da die Umkehrabbildung jeder bijektiven linearen Abbildung wieder linear ist, ist auch φ^{-1} linear.
Also ist φ ein Vektorraumisomorphismus zwischen $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ und V.

(b)
- Man zeigt die drei Unterraumbedingungen für U_i:
  Existenz des Nullvektors: Da V_i ein Vektorraum ist, enthält er ein Nullelement $\vec{0} \in V_i$. In V gilt dann

  $$\vec{0} = (\vec{0}, \ldots, \vec{0}) \in \{(\underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{i-1 \text{ mal}}, \vec{v}, \underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{n-i \text{ mal}}) \mid \vec{v} \in V_i\} = U_i \,.$$

  Additive Abgeschlossenheit: Seien $\vec{u}, \vec{u}' \in U_i$, dann existieren Elemente $\vec{v}, \vec{v}' \in V_i$ mit

  $$\vec{u} = (\underbrace{\vec{0}, \ldots \vec{0}}_{i-1 \text{ mal}}, \vec{v}, \underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{n-i \text{ mal}}), \quad \vec{u}' = (\underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{i-1 \text{ mal}}, \vec{v}', \underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{n-i \text{ mal}}) \,.$$

  Da V_i ein Vektorraum ist gilt $\vec{v} + \vec{v}' \in V$ und damit folgt

  $$\vec{u} + \vec{u}' = (\underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{i-1 \text{ mal}}, \vec{v} + \vec{v}', \underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{n-i \text{ mal}}) \in U_i.$$

  Skalarmultiplikative Abgeschlosseneit: Seien $\vec{u} \in U_i$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann existiert ein Element $\vec{v} \in V_i$ mit $\vec{u} = (\underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{i-1 \text{ mal}}, \vec{v}, \underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{n-i \text{ mal}})$. Da V_i ein Vektorraum ist gilt $\lambda\vec{v} \in V$ und damit folgt

  $$\lambda\vec{u} = (\underbrace{\vec{0}, \ldots \vec{0}}_{i-1 \text{ mal}}, \lambda\vec{v}, \underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{n-i \text{ mal}}) \in U_i \,.$$

  Insgesamt ergibt sich, dass U_i ein Untervektorraum von V ist.
- Man betrachtet die Abbildung

  $$f : U_i \to V_i, \quad (\underbrace{\vec{0}, \ldots \vec{0}}_{i-1 \text{ mal}}, \vec{v}_i, \underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{n-i \text{ mal}}) \mapsto \vec{v}_i \,.$$

  f ist offensichtlich bijektiv und linear, also ein Vektorraumisomorphismus.

- Jedes Element $\vec{v} \in V$ kann man wegen der Definition des direkten Produkts auf genau eine Weise in der Gestalt

$$\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n) = (\vec{v}_1, \vec{0}, \dots, \vec{0}) + (\vec{0}, \vec{v}_2, \vec{0}, \dots, \vec{0}) + \cdots + (\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{v}_n)$$

  mit $\vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2, \dots, \vec{v}_n \in V_n$ schreiben. Die rechte Seite der Gleichung hat die Form einer allgemeinen Summe $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_n$ mit $\vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2, \dots, \vec{u}_n \in U_n$. Jedes Element aus V lässt sich also auf eindeutige Weise als so eine Summe schreiben.

  D.h. es gilt $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$.

Aufgabe H21 (Basis und direkte Summe) (3 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U_1 \subseteq V$ ein Untervektorraum.

Zeigen Sie: Es gibt einen Untervektorraum $U_2 \subseteq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$.

Lösung:

Es sei $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$ eine Basis von U_1. Dann sind diese Vektoren insbesondere auch in V linear unabhängig und wegen dem Basisergänzungssatz gibt es Elemente $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m \in V$, so dass $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ eine Basis von V bildet. Setze $U_2 := \operatorname{span}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$. Dies ist bekanntermaßen ein Untervektorraum von V.

Jedes Element aus V lässt sich auf eindeutige Weise in der Gestalt

$$\underbrace{\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n}_{\in U_1} + \underbrace{\mu_1 \vec{w}_1 + \cdots + \mu_m \vec{w}_m}_{\in U_2}$$

mit $\lambda_1 \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ schreiben. Da $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U_2.

D.h. jedes Element aus U_1 hat genau eine Darstellung als Linearkombination der Elemente $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ und jedes Element aus U_2 hat genau eine Darstellung als Linearkombination der Elemente $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$.

Zusammen ergibt sich, dass jedes Element aus V eine eindeutige Darstellung als Summe von einem Element aus U_1 und einem Element aus U_2 hat.

D.h. es gilt $V = U_1 \oplus U_2$.

Aufgabe H22 (5 Punkte)

(a) Seien $V = U_1 \oplus U_2$ und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ gibt, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$.

(b) Sei V ein endlicher $\mathbb{K}$-Vektorraum und U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V. Angenommen, für je zwei lineare Abbildungen $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ gilt.

Lösung:

(a) Existenz: Für alle $\vec{x}$ in V, sei $\phi(\vec{x}) := \phi_1(\vec{x}_1) + \phi_2(\vec{x}_2)$, mit $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ und $\vec{x}_1 \in U_1$ und $\vec{x}_1 \in U_2$. ϕ ist linear, wie jetzt gezeigt wird. Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ und $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$, mit $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in U_1$ und $\vec{x}_2, \vec{y}_2 \in U_2$. Es gilt $\vec{x}_1 + \lambda \vec{y}_1 \in U_1$ und $\vec{x}_2 + \lambda \vec{y}_2 \in U_2$, weil U_1 und U_2 Untervektorräume von V sind. $\phi(\vec{x} + \lambda \vec{y}) = \phi_1(\vec{x}_1 + \lambda \vec{y}_1) + \phi_2(\vec{x}_2 + \lambda \vec{y}_2) = \phi_1(\vec{x}_1) + \phi_2(\vec{x}_2) + \lambda \phi_1(\vec{y}_1) + \lambda \phi_2(\vec{y}_2) = \phi(\vec{x}) + \lambda \phi(\vec{y})$.
Eindeutigkeit: Seien $\phi, \phi' : V \to W$ zwei lineare Abbildungen, sodass $\phi|_{U_1} = \phi'|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi'|_{U_2} = \phi_2$ gilt. Für alle $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in U_1 \oplus U_2$, $\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_1) + \phi(\vec{x}_2) = \phi_1(\vec{x}_1) + \phi_2(\vec{x}_2) = \phi_1'(\vec{x}_1) + \phi_2'(\vec{x}_2) = \phi'(\vec{x})$.

(b) Wir zeigen zuerst, dass $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ gilt und dann, dass $U_1 + U_2 = V$ gilt.
($\Leftarrow$) Seien $\phi_1 = 0$ und $\phi_2 = \mathrm{id}$ und ϕ linear, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$ gilt. Sei $\vec{v} \in U_1 \cap U_2$. $\phi(\vec{v}) = \phi_1(\vec{v}) = \vec{0}$ und $\phi(\vec{v}) = \phi_2(\vec{v}) = \vec{v}$. Daraus folgt $\vec{v} = \vec{0}$, d.h. $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$.
($\Rightarrow$) Sei W ein Untervektorraum mit $V = (U_1 + U_2) \oplus W$. (Ein solcher Untervektorraum existiert.) Sei $\phi = 0$ und ϕ' linear, sodass $\phi'|_{U_1+U_2} = 0$ und $\phi'|_W = \mathrm{id}$. (Solche Abbildung existiert wegen der vorige Teilaufgabe.) Wegen der Annahme gilt $\phi = \phi'$, d.h. $W = \{\vec{0}\}$ und $U_1 + U_2 = V$.

Aufgabe H23 (Basis) (3 Punkte)

Bestimmen Sie für den von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ aufgespannten linearen Teilraum eine Basis.

Lösung:

Wir betrachten die Matrix, welche die gegebenen Vektoren als Zeilenvektoren enthält und bringen diese mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf Stufenform. Die Zeilen der entstehenden Matrix, welche nicht Null sind, sind dann die gesuchten Basisvektoren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 41 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix}$ bilden somit eine Basis des betrachteten Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe H24 (Direkte Summe)

Seien V ein Vektorraum und A, B, C drei Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Aussagen Äquivalent sind.

(i) $A + B + C = A \oplus B \oplus C$

(ii) $A + B = A \oplus B$ und $(A + B) \cap C = \{\vec{0}\}$

Lösung:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Angenommen, es ist $A + B + C = A \oplus B \oplus C$.

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in A$ und $\vec{a}, \vec{b} \in B$ mit $\vec{x} + \vec{a} = \vec{y} + \vec{b}$. Dann gilt auch $\vec{x} + \vec{a} + \vec{0} = \vec{y} + \vec{b} + \vec{0}$ mit $\vec{0} \in C$. Wegen der Vorraussetzung $A + B + C = A \oplus B \oplus C$ folgt daraus $\vec{x} = \vec{y}, \vec{a} = \vec{b}$ und $\vec{0} = \vec{0}$. D.h. $A + B = A \oplus B$.

Seien $\vec{a} \in A$, $\vec{b} \in B$ und $\vec{c} \in C$ mit $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Dann gilt $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ und $\vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ mit $\vec{a}, \vec{0} \in A$, $\vec{b}, \vec{0} \in B$ und $\vec{c}, \vec{0} \in C$. Wegen $A + B + C = A \oplus B \oplus C$ folgt daraus $\vec{a} = \vec{b} = -\vec{c} = \vec{0}$. Somit $(A + B) \cap C = \{\vec{0}\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen, es gilt $A + B = A \oplus B$ und $(A + B) \cap C = \{\vec{0}\}$.

Seien $\vec{a}, \vec{a}' \in A$, $\vec{b}, \vec{b}' \in B$ und $\vec{c}, \vec{c}' \in C$ mit $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}'$.

Dann gilt $\vec{a} - \vec{a}' + \vec{b} - \vec{b}' = \vec{c}' - \vec{c}$. Wegen $(A + B) \cap C = \{\vec{0}\}$ gilt also $\vec{a} - \vec{a}' + \vec{b} - \vec{b}' = \vec{c}' - \vec{c} = \vec{0}$, daraus folgt $\vec{c} = \vec{c}'$ und $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a}' + \vec{b}'$.

Wegen $A + B = A \oplus B$ ergibt sich auch $\vec{a} = \vec{a}'$ und $\vec{b} + \vec{b}'$.

Somit gilt $A + B + C = A \oplus B \oplus C$.