Lineare Algebra
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

23.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G24 (Vektorräume)

(a) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum?

(b) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum?

(c) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Z}$-Vektorraum?

Dabei sollen die Addition und die skalare Multiplikation jeweils die bekannte Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ sein. Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung:

(a) $\mathbb{R}$ ist kein $\mathbb{C}$-Vektorraum, da die skalare Multiplikation eines Elements aus dem Grundkörper $\mathbb{C}$ mit einem Element aus $\mathbb{R}$ nicht in $\mathbb{R}$ liegen muss (z.B. ist $i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R}$).

(b) $\mathbb{R}$ bildet mit der normalen reellen Addition und Multiplikation einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ bekanntermaßen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, ergeben sich alle nötigen Eigenschaften sofort.

(c) $\mathbb{R}$ ist kein $\mathbb{Z}$-Vektorraum, da $\mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Aufgabe G25 (Vektorräume)

Es seien M eine beliebige Menge und V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathscr{F}(M,W)$ der Abbildungen von M nach W mit den üblichen Operationen

$$\begin{array}{llll} + : \mathscr{F}(M,W) \times \mathscr{F}(M,W) \to \mathscr{F}(M,W), & (f,g) \mapsto f+g & \text{mit} & (f+g)(x) := f(x) + g(x)\, \forall x \in M \text{ und} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathscr{F}(M,W) \to \mathscr{F}(M,W), & (\lambda, g) \mapsto \lambda g & \text{mit} & (\lambda g)(x) := \lambda \cdot g(x)\, \forall x \in M \end{array}$$

einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Hom}(V,W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, indem sie zeigen, dass es sich bei $\mathrm{Hom}(V,W)$ um einen Untervektorraum von $\mathscr{F}(V,W)$ handelt.

Lösung:

(a) Offensichtlich sind die Operationen $+$ und $\cdot$ wohldefiniert. Außerdem ist die Abbildung 0, welche jedes Element von M in $\vec{0} \in W$ abbildet, das Nullelement in $\mathscr{F}(M,W)$. Man muss noch die Eigenschaften aus der Definition von Vektorräumen zeigen.

Dazu seien $f, g, h \in \mathscr{F}(M, W)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $x \in M$ beliebig. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(f+(g+h))(x) &= f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = (f(x)+g(x))+h(x) = (f+g)(x)+h(x) \\
&= ((f+g)+h)(x) \\
\Rightarrow f+(g+h) &= (f+g)+h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f+0)(x) &= f(x)+0(x) = f(x)+\vec{0} = f(x) \\
\Rightarrow f+0 &= f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f+(-1)f)(x) &= f(x)+((-1)\cdot f)(x) = f(x)+(-1)\cdot f(x) = 0 = 0(x) \\
\Rightarrow f+(-1)f &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x) \\
\Rightarrow f+g &= g+f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda(f+g))(x) &= \lambda\cdot((f+g)(x)) = \lambda\cdot(f(x)+g(x)) = \lambda\cdot f(x)+\lambda\cdot g(x) = (\lambda f)(x)+(\lambda g)(x) \\
&= (\lambda f+\lambda g)(x) \\
\Rightarrow \lambda(f+g) &= \lambda f+\lambda g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\lambda+\mu)f)(x) &= (\lambda+\mu)\cdot f(x) = \lambda\cdot f(x)+\mu\cdot f(x) = (\lambda f)(x)+(\mu f)(x) = (\lambda f+\mu f)(x) \\
\Rightarrow (\lambda+\mu)f &= \lambda f+\mu f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda(\mu f))(x) &= \lambda\cdot(\mu f)(x) = \lambda\cdot(\mu\cdot f(x)) = (\lambda\mu)\cdot f(x) = ((\lambda\mu)f)(x) \\
\Rightarrow \lambda(\mu f) &= (\lambda\mu)f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1\cdot f)(x) &= 1\cdot f(x) = f(x) \\
\Rightarrow 1\cdot f &= f.
\end{aligned}$$

(b) Man zeigt die drei Unterraumkriterien für $\mathrm{Hom}(V, W)$:

- $0 \in \mathscr{F}(V, W)$ ist die Abbildung
$$0 : V \to W, \qquad \vec{v} \mapsto \vec{0}\,.$$
Diese ist offensichtlich linear. D.h., es gilt $0 \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
- Seien $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ beliebig. Dann gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$:
$$\begin{aligned}
(f+g)(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2) &= f(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2)+g(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1)+\lambda_2 f(\vec{v}_2)+\lambda_1 g(\vec{v}_1)+\lambda_2 g(\vec{v}_2) \\
&= \lambda_1\cdot(f+g)(\vec{v}_1)+\lambda_2\cdot(f+g)(\vec{v}_2)
\end{aligned}$$
D.h. $f+g$ ist eine lineare Abbildung von V nach W, also gilt $f+g \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
Daraus folgt, dass die Abgeschlossenheit unter der inneren Verknüpfung
- Es seien $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $\mu \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$:
$$\begin{aligned}
(\mu f)(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2) &= \mu\cdot f(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2) = \mu\cdot\lambda_1\cdot f(\vec{v}_1)+\mu\cdot\lambda_2\cdot f(\vec{v}_2) \\
&= \lambda_1\cdot(\mu f)(\vec{v}_1)+\lambda_2\cdot(\mu f)(\vec{v}_2)
\end{aligned}$$
D.h. μf ist eine lineare Abbildung von V nach W, also gilt $\mu f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
Daraus folgt Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation.

Aufgabe G26 (Vektorräume)
Zeigen Sie, dass $V = \mathbb{R}$ mit den folgenden Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

$$\begin{aligned}
+_V &: V\times V \to V, & (x, y) &\mapsto x+y-1 \\
\cdot_V &: \mathbb{R}\times V \to V, & (\lambda, x) &\mapsto \lambda\cdot x-\lambda+1 = \lambda x-\lambda+1
\end{aligned}$$

Lösung:

Es ist zu beachten, dass das neutrale Element der Addition, welches normalerweise mit Null bezeichnet wird, hier das Element $e = 1 \in \mathbb{R}$ ist.

Für den Beweis seien im Folgenden $x, y, z, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Die zu zeigenden Aussagen ergeben sich durch die folgenden einfachen Umformungen.

$$\begin{aligned} x +_V (y +_V z) &= x +_V (y + z - 1) = x + (y + z - 1) - 1 = (x + y - 1) + z - 1 = (x + y - 1) +_V z \\ &= (x +_V y) +_V z \end{aligned}$$

$$x +_V e = x +_V 1 = x + 1 - 1 = x$$

$$x +_V (-1) \cdot_V x = x +_V (-x + 1 + 1) = x + (-x) + 2 - 1 = 1 = e$$

$$x +_V y = x + y - 1 = y + x - 1 = y +_V x$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot_V (x +_V y) &= \lambda \cdot_V (x + y - 1) = \lambda(x + y - 1) - \lambda + 1 = \lambda x + \lambda y - \lambda - \lambda + 1 \\ &= \lambda x - \lambda + 1 + \lambda y - \lambda + 1 - 1 = (\lambda x - \lambda + 1) +_V (\lambda y - \lambda + 1) \\ &= \lambda \cdot_V x +_V \lambda \cdot_V y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot_V x &= (\lambda_1 + \lambda_2)x - (\lambda_1 + \lambda_2) + 1 = \lambda_1 x - \lambda_1 + 1 + \lambda_2 x - \lambda_2 + 1 - 1 \\ &= (\lambda_1 x - \lambda_1 + 1) +_V (\lambda_2 x - \lambda_2 + 1) = \lambda_1 \cdot_V x +_V \lambda_2 \cdot_V x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot_V (\lambda_2 \cdot_V x) &= \lambda_1 \cdot_V (\lambda_2 x - \lambda_2 + 1) = \lambda_1(\lambda_2 x - \lambda_2 + 1) - \lambda_1 + 1 = (\lambda_1 \lambda_2)x - (\lambda_1 \lambda_2) + 1 \\ &= (\lambda_1 \lambda_2) \cdot_V x \end{aligned}$$

$$1 \cdot_V x = x - 1 + 1 = x$$

Insgesamt folgt, dass $V = \mathbb{R}$ mit den angegebenen Operationen einen Vektorraum bildet.

Aufgabe G27 (Untervektorräume)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge von V.

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.

(i) U ist ein Untervektorraum von V.

(ii) Es sind die zwei Bedingungen

  (1) U ist nicht leer und

  (2) für je zwei Elemente $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ und zwei Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \in U$$

  erfüllt.

Lösung:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei U ein Untervektorraum von V. Es gilt $\vec{0} \in U$, insbesondere ist U nicht leer und damit gilt (ii)(1).

Für $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt wegen der Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation $\lambda_1 \vec{u}_1, \lambda_2 \vec{u}_2 \in U$. Aus der Abgeschlossenheit gegenüber der Addition folgt dann $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \in U$, womit auch (ii)(2) und damit (ii) insgesamt gezeigt ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei U eine Teilmenge von V, die (ii)(1) und (ii)(2) erfüllt.

Wegen (ii)(1) existiert ein $u \in U$. Setzt man nun in (ii)(2) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ und $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}$ so erhält man

$$0 = \vec{u} - \vec{u} = 1 \cdot \vec{u} + (-1) \cdot \vec{u} \in U\,.$$

Sind $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$, so kann man $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ setzen und erhält aus (ii)(2)

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in U\,.$$

Dies bedeutet Abgeschlossenheit unter Addition.

Sind $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{u} \in U$ so folgt durch die Setzung $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0, \vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{0}$ aus (ii)(2)

$$\lambda \vec{u} = \lambda \vec{u} + \vec{0} \cdot \vec{u} \in U\,.$$

Damit gilt auch Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation.

Insgesamt folg, dass U ein Untervektorraum von V ist. Es gilt also (i).

Aufgabe G28 (Lineare Abbildungen)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.$$

Bestimme ein Formel für $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung:
Für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= f\left(x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = x \cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + y \cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = x \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2x+y\\3x+4y\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H17 (Kern einer linearen Abbildung) (5 Punkte)
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Der Kern von f ist definiert als $\ker f = \{x \in V \mid f(x) = \vec{0}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\ker f$ ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
  (i) $\ker f = \{\vec{0}\}$.
  (ii) f ist injektiv.

Lösung:

(a) Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Elemente von $\ker f$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Aus $f(\vec{x}) = f(\vec{y}) = \vec{0}$ und der Linearität von f folgt $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) = \vec{0}$.
Also ist $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \ker f$.
Da außerdem $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und damit $\vec{0} \in \ker f$ gilt, folgt, dass $\ker f$ ein Untervektorraum von V ist.

(b) Angenommen f ist injektiv.
Sei $\vec{x} \in \ker f$. Aus $f(\vec{x}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$ folgt $\vec{x} = \vec{0}$ wegen der Injektivität.
D.h. $\ker f = \{\vec{0}\}$.
Angenommen, es gilt $\ker f = \{\vec{0}\}$.
Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Elemente von V mit $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$. Daraus folgt $f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$ wegen der Lineariät von f. Wegen $\ker f = \{\vec{0}\}$ gilt also $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$. D.h. es ist $\vec{x} = \vec{y}$ und somit ist f injektiv.

Aufgabe H18 (Polynome) (5 Punkte)
Sei $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, wobei $\mathbb{R}[x] := \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, a_i \in \mathbb{R},\, 0 \le i \le n\right\}$ die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten und $D(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ ist.

(a) Ist $\mathbb{R}[x]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(b) Was ist $D(x^n)$?

(c) Ist D eine lineare Abbildung?

(d) Was ist der Kern von D?

Lösung:

(a) Ja.

(b) $D(x^n) = nx^{n-1}$ wenn $0 < n$ und $D(x^0) = 0$.

(c) Ja.

(d) $\ker D = \{\lambda \cdot x^0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe H19 (Lineare Abbildungen) (5 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 3x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie durch konkretes Nachrechnen der definierenden Bedingung, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt. (Dabei bezeichnet $A\vec{v}$ wie gewöhnlich das Matrizenprodukt von A und $\vec{v}$.)

(c) Bestimmen Sie den Kern von f. Dieser ist definiert durch

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(0) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(\vec{v}) = 0\}\,.$$

Dabei bezeichnet $\vec{0}$ die Null in $\mathbb{R}^2$, also $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\right) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + 3(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ 3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 y_1 + 3\lambda_1 z_1 + \lambda_2 x_2 + 2\lambda_2 y_2 + 3\lambda_2 z_2 \\ 3\lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 y_1 + \lambda_1 z_1 + 3\lambda_2 x_2 + 2\lambda_2 y_2 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1(x_1 + 2y_1 + 3z_1) + \lambda_2(x_2 + 2y_2 + 3z_2) \\ \lambda_1(3x_1 + 2y_1 + z_1) + \lambda_2(3x_2 + 2y_2 + z_2) \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 + 3z_1 \\ 3x_1 + 2y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 + 3z_2 \\ 3x_2 + 2y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2)\,.
\end{aligned}$$

Dies ist gerade die definierende Gleichung der linearen Abbildungen.

(b) Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 3x + 2y + z \end{pmatrix} = f(\vec{v})\,.$$

Diese Matrix A ist also die gesuchte.

(c) Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt $f(\vec{v}) = 0$ genau dann, wenn $\begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 3x + 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Dies ist ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & -4y & - & 8z & = & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind $\ker(f) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.