Lineare Algebra
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

16.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G19
Berechnen Sie das inverse Element bzgl. Multiplikation in der folgenden Gruppe:

(a) $\bar{3}$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
(b) $\bar{6}$ in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
(c) $\bar{8}$ in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
(d) $\bar{5}$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
(e) $\bar{5}$ in $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$
(f) $\bar{13}$ in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$

Lösung:

(a) 3
(b) 2
(c) 5
(d) 3
(e) 3
(f) 4

Aufgabe G20

(a) Wir betrachten die Gruppe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Gesucht ist $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, so dass $\{a^n | n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\backslash\{\bar{0}\}$ ist.
(b) Wir betrachten die Gruppe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Gesucht ist $a \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, so dass $\{a^n | n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\backslash\{\bar{0}\}$ ist.

Lösung:

(a) $\bar{3}$, denn $\bar{3}^1 = \bar{3},\ \bar{3}^2 = \bar{2},\ \bar{3}^3 = \bar{6},\ \bar{3}^4 = \bar{4},\ \bar{3}^5 = \bar{5},\ \bar{3}^6 = \bar{1}$
(b) $\bar{2}$, denn $\bar{2}^1 = \bar{2},\ \bar{2}^2 = \bar{4},\ \bar{2}^3 = \bar{3},\ \bar{3}^4 = \bar{1}$

Aufgabe G21 (Fehlstände)
Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Jedes Paar $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i < j$, für das $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt, nennen wir einen *Fehlstand* oder auch eine *Inversion* von σ. Zum Beispiel wären für die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

genau die Paare $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$ die Fehlstände von σ.

(a) Bestimmen Sie alle Fehlstände von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

($*$) Bestimmen Sie die Fehlstände aller Elemente von S_3.

(**) Was ist die maximale Anzahl von Fehlständen, die eine Permutation $\sigma \in S_n$ haben kann? Geben Sie eine Permutation an, die diese maximale Anzahl von Fehlständen besitzt.

Lösung:

(a) Die Fehlstände sind $(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(4,5),(4,6)$.

(*)

Permutation	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)
Anzahl Fehlstände	0	1	1	2	2	3

(**) Bei einer n-stellige Permutation gibt es $1+2+\cdots+n-1$ Paare $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,n\}$ mit $i < j$. Also kann es höchstens diese Anzahl von Fehlständen geben. Bei der Permutation $(n, n-1, \ldots, 3, 2, 1)$ jedes Paar (i,j) mit $i < j$ ein Fehlstand, die Anzahl der Fehlstände ist hier also $1+2+\cdots+n-1$.
Bemerkung: Es gilt die Formel $1+2+\cdots+n-1 = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Aufgabe G22

Sei $(G,\cdot,e)$ eine Gruppe und $a \in G$. Sei $f: \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto a \cdot x \end{array}$.

(a) Ist f injektiv?

(b) Ist f surjektiv?

(c) Wenn f bijektiv wäre, was wäre f^{-1}?

Lösung:

(a) Seien $x, y \in G$, mit $f(x) = f(y)$. Es gilt $a \cdot x = a \cdot y$. Daraus folgt $a^{-1} \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot a \cdot y$ und $e \cdot x = e \cdot y$, d.h. $x = y$. Somit ist f injektiv.

(b) Sei $x \in G$. Es gilt $f(a^{-1} \cdot x) = a \cdot (a^{-1} \cdot x) = (a \cdot a^{-1}) \cdot x = e \cdot x = x$. Somit ist f surjektiv.

(c) $f^{-1}: \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto a^{-1} \cdot x \end{array}$.

Aufgabe G23 (Abschwächung der Definition von Gruppen)
Sei G eine Menge und $*: G \times G \to G$. $(G,*)$ ist eine schwache Gruppe, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Assoziativität: $\forall a,b,c \in G: (a*b)*c = a*(b*c)$.
- Linksneutrales Element: es gibt $e \in G$, mit $e*a = a$ für alle $a \in G$.
- Linksinverses Element: $\forall a \in G: \exists b \in G: b*a = e$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe auch eine schwache Gruppe ist.

(b) Umgekehrt wollen wir jetzt zeigen, dass eine schwache Gruppe auch eine Gruppe ist.
  i. Sei $a, b \in G$. Angenommen, es gilt $b*a = e$ und $c*b = e$, zeigen Sie, dass $a*b = (c*b)*(a*b)$.
  ii. Mithilfe der obigen Teilaufgabe, zeigen Sie dann, dass $a*b = e$, d.h. jedes linksinverse Element ist auch rechtsinvers.
  iii. Sei $a \in G$. Mithilfe der obigen Teilaufgabe, zeigen Sie dann, $a*e = a$, d.h. jedes linksneutrale Element ist auch rechtsneutral.

Lösung:

(a) Ein neutrales Element ist auch linksneutral und ein inverses Element ist auch linksinvers.

(b) i. $a*b = e*(a*b)$, weil e linksneutral ist. Somit $a*b = (c*b)*(a*b)$ wegen die Annahme $c*b = e$.
  ii. Wegen der Assoziativität, gilt $a*b = (c*b)*(a*b) = c*(b*a)*b$. Wegen der Annahme $b*a = e$ gilt $a*b = c*e*b$. Aus $e*b = b$ folgt $a*b = c*(e*b) = c*b$. Somit $a*b = e$, weil $c*b = e$ gilt.
  iii. $a*e = a*(a^{-1}*a) = (a*a^{-1})*a = e*a = a$.

Hausübung

Aufgabe H14 (Symmetrische Gruppen) (7 Punkte)
Wir betrachten in dieser Aufgabe die Menge S_n aller n-stelligen Permutationen. Es bezeichnet $\circ: S_n \times S_n \to S_n$ die Verkettung von Permutationen.

(a) Zeigen Sie, dass $\circ$ auf S_n assoziativ ist. Tipp: Betrachten Sie die Permutationen in dieser Teilaufgabe am besten als Abbildungen von $\{1,\dots,n\}$ in sich.

(b) Berechnen Sie alle möglichen Verkettungen von Elementen in S_3. Stellen Sie diese in einer Verknüpfungstabelle dar.

(c) Zeigen Sie, dass S_3 mit der Verkettung $\circ$ eine Gruppe bildet. Was ist das neutrale Element?

(d*) Welche Elemente von S_3 haben eine gerade Anzahl von Fehlständen?

(e*) Eine Untergruppe einer gegebenen Gruppe G ist eine Teilmenge von G, die mit der Operation und dem neutralen Element von G selbst wieder eine Gruppe bildet.
Ist die Teilmenge der Permutationen mit gerader Anzahl von Fehlständen in S_3 eine Untergruppe?

(f*) Geben Sie alle Untergruppen von S_3 an.

(g*) Zeigen Sie, dass S_n für alle natürlichen Zahlen n eine Gruppe ist.

Lösung:

(a) Seien $\sigma,\tau,\rho : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ Permutationen aus S_n und $x \in \{1,\dots,n\}$ beliebig. Dann gilt

$$(\sigma\circ(\tau\circ\rho))(x) = \sigma((\tau\circ\rho)(x)) = \sigma(\tau(\rho(x))) = (\sigma\circ\tau)(\rho(x)) = ((\sigma\circ\tau)\circ\rho)(x)\,,$$

woraus die Assoziativität $\sigma\circ(\tau\circ\rho) = (\sigma\circ\tau)\circ\rho$ folgt.
Bemerkung: Auf diese Weise kann man auch allgemein die Assoziativität von Abbildungen zeigen.

(b) S_3 hat folgende Elemente:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1),\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12),\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13),$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23),\ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123),\ \text{ und } \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

Daraus ergibt sich die Verknüpfungstabelle:

$\circ$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_2	σ_2	σ_1	σ_6	σ_5	σ_4	σ_3
σ_3	σ_3	σ_5	σ_1	σ_6	σ_2	σ_4
σ_4	σ_4	σ_6	σ_5	σ_1	σ_3	σ_2
σ_5	σ_5	σ_3	σ_4	σ_2	σ_6	σ_1
σ_6	σ_6	σ_4	σ_2	σ_3	σ_1	σ_5

(c) Die Verkettung ist bekanntermaßen abgeschlossen in S_n (das sieht man insbesondere an der Verknüpfungstabelle in Aufgabenteil (b)). Die Assoziativität wurde in (a) gezeigt. Die restlichen Eigenschaften kann man auch an der Verknüpfungstabelle ablesen.
Das neutrale Element ist σ_1 und die inversen Elemente sind

$$\sigma_1^{-1} = \sigma_1,\ \sigma_2^{-1} = \sigma_2,\ \sigma_3^{-1} = \sigma_3,\ \sigma_4^{-1} = \sigma_4,\ \sigma_5^{-1} = \sigma_6,\ \sigma_6^{-1} = \sigma_5\,.$$

(d*) σ_1, σ_5 und σ_6 haben eine gerade Anzahl von Fehlständen.

(e*) Ja, die Menge $\{\sigma_1,\sigma_5,\sigma_6\}$ bildet eine Untergruppe von S_3. Man kann alle Eigenschaften wieder leicht an der Verknüpfungstabelle unter (b) ablesen.

(f*) Die Untergruppen kann man auch an der Verknüpfungstabelle ablesen. Es sind

$$\{\sigma_1\},\ \{\sigma_1,\sigma_2\},\ \{\sigma_1,\sigma_3\},\ \{\sigma_1,\sigma_4\},\ \{\sigma_1,\sigma_5,\sigma_6\} \text{ und } \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\}\,.$$

(g*) Dass die Verkettung von Permutationen wieder eine Permutation ist, folgt direkt aus der Aussage, dass die Verkettung zweier bijektiver Abbildungen wieder bijektiv ist und der Betrachtung von Permutationen als bijektive Abbildungen.

Die Assoziativität wurde bereits in Aufgabenteil (a) gezeigt.

Das neutrale Element ist immer (1), denn es gilt $(1) \circ \tau = \tau = \tau \circ (1)$ für alle $\tau \in S_n$.

Seien τ und ρ Elemente aus S_n, mit inversen Elementen τ^{-1} und ρ^{-1}. Dann besitzt auch $\tau \circ \rho$ ein inverses Element und zwar $\rho^{-1} \circ \tau^{-1}$. Dies sieht man an der Gleichungskette $(\tau \circ \rho) \circ (\rho^{-1} \circ \tau^{-1}) = \tau \circ \rho \circ \rho^{-1} \circ \tau^{-1} = \tau \circ (1) \circ \tau^{-1} = \tau \circ \tau^{-1} = (1)$. Analog gilt $(\rho^{-1} \circ \tau^{-1}) \circ (\tau \circ \rho) = (1)$. Da sich alle Permutationen als Verkettung von Zyklen darstellen lassen, reicht es also zu zeigen, dass alle Zyklen inverse Elemente besitzen, denn aus obiger Aussage folgt dann, dass alle Elemente in S_n inverse Elemente besitzen. Es ist leicht zu sehen, dass $(k_1, k_2, \ldots, k_m)^{-1} = (k_m, \ldots, k_2, k_1)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene Zahlen $k_1, \ldots, k_m \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Dies schließt den Beweis ab.

Ein beliebiges Element $\tau \in S_n$ ist eine bijektive Abbildung von $\{1, \ldots, n\}$ in sich. Deswegen existiert eine Umkehrabbildung ρ von τ, die wieder bijektiv ist. ρ ist also auch ein Element von S_n. Außerdem gilt wegen der Definition der Umkehrabbildung $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho = (1)$. D.h. ρ ist das Inverse Element von τ.

Insbesondere besitzt jedes Element in S_n ein Inverses.

Aufgabe H15 (Gruppen) (5 Punkte)

Geben Sie an, welche der folgenden Mengen Gruppen sind. Zeigen Sie bei den Mengen, die keine Gruppen sind, welche Gruppeneigenschaft verletzt ist. Welche der Gruppen sind abelsch? Geben Sie bei den Gruppen das neutrale Element n und jeweils zu jedem $g \in G_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, das inverse Element an.

(a) $G_1 := (\mathbb{Z}_m, +)$, wobei $+$ die Addition in $\mathbb{Z}_m$ aus der Vorlesung bezeichnet.

(b) $G_2 := (\mathbb{R}^2, \odot)$ mit $(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) := (x_1 y_1, x_2 y_2)$.

(c) $G_3 := (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation von rationalen Zahlen bezeichnet.

(d) $G_4 := (\{0, 1\}, \oplus)$ mit $0 \oplus 0 := 0$, $0 \oplus 1 := 1$, $1 \oplus 0 := 1$ und $1 \oplus 1 := 0$.

(e) $G_5 := (\mathscr{P}(\{0, 1\}), \cup)$, wobei $A \cup B$ wie gewohnt die Vereinigung der beiden Mengen A und B bezeichnet.

Lösung:

(a) G_1 ist eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist $n = \widetilde{0}$, zu $\widetilde{g} \in G_1$ ist das Element $\widetilde{m - g}$ ein inverses Element, denn dieses erfüllt $\widetilde{g} + \widetilde{m - g} = \widetilde{g + m - g} = \widetilde{m} = \widetilde{0} = n$.

(b) G_2 ist keine Gruppe. Obwohl G_2 assoziativ ist und das neutrale Element $(1, 1)$ hat, gibt es zum Beispiel für das Element $(1, 0) \in G_2$ kein inverses Element $(x, y) \in G_2$: dieses müsste der Bedingung $y \cdot 0 = 1$ genügen, was unmöglich ist.

(c) G_3 ist eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist $1 \in \mathbb{Q}$. Wenn $g = \frac{m}{k} \in G_3$ mit $m, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt, dann ist $\overline{g} = \frac{k}{m} \in G_3$ das inverse Element, denn es gilt

$$\frac{m}{k} \cdot \frac{k}{m} = \frac{mk}{km} = 1 = n.$$

(d) G_4 ist eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist 0. Das inverse Element zu 0 ist 0 selbst, das inverse Element zu 1 ist ebenfalls 1 (das liest man alles an der Definition von $\oplus$ ab).

(e) G_5 ist keine Gruppe. Zwar ist auch G_5 assoziativ mit neutralem Element $\emptyset$, allerdings hat kein Element außer $\emptyset$ selbst ein Inverses: dieses müsste für $A \in G_5$ der Bedingung $A \cup \overline{A} = \emptyset$ genügen, woraus bereits $A = \overline{A} = \emptyset$ folgt.

Aufgabe H16 (Direktes Produkt) (5 Punkte)

Seien $(G, *, e)$ und $(G', *', e')$ zwei Gruppen. Sei $\cdot : (G \times G') \times (G \times G') \to G \times G'$ die Verknüpfung mit $(x, x') \cdot (y, y') = (x * y, x' *' y')$.

(a) Zeigen Sie, dass $(G \times G', \cdot)$ eine Gruppe ist. Was ist das neutral Element?

(b) Zeigen Sie, dass $\Pi_1 : G \times G' \to G$, mit $\Pi_1(g, g') = g$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\Sigma_1 : G \to G \times G'$, mit $\Sigma_1(g) = (g, e')$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

(d) Jetzt wird angenommen, dass $G = G'$ abelsch ist, zeigen Sie, dass $\Phi : G \times G \to G$, mit $\Phi(g, g') = g * g'$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

Lösung:

(a) Sei $(x, y) \in G \times G'$. Es gilt $(x, y)\cdot(e, e') = (x*e, y*' e') = (x, y)$ und $(e, e')\cdot(x, y) = (e*x, e'*' y) = (x, y)$. Somit ist (e, e') neutral. Außerdem $(x, y)\cdot(x^{-1}, y^{-1}) = (x*x^{-1}, y*' y^{-1}) = (e, e')$ und $(x^{-1}, y^{-1})\cdot(x, y) = (x^{-1}*x,' y^{-1}*y) = (e, e')$.

(b) $\Pi_1((x, x') \cdot (y, y')) = \Pi_1((x * y, x' *' y')) = x * y = \Pi_1((x, x')) * \Pi_1((y, y'))$.

(c) $\Sigma_1(x * y) = (x * y, e') = (x, e') \cdot (y, e') = \Sigma_1(x) \cdot \Sigma_1(y)$.

(d) $\Phi((x, x') \cdot (y, y')) = \Phi((x * y, x' *' y')) = x * y * x' * y' = x * x' * y * y' = \Phi((x, x')) * \Phi((y, y'))$.