Lineare Algebra 1
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

10.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G16
Berechnen Sie das Inverse zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Aufgabe G17
Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$, auch A^T invertierbat ist und bestimme $(A^T)^{-1}$.

Lösung:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E_n^T = E_n,$$

wobei E_n die Einheitsmatrix ist. Somit ist $(A^{-1})^T$ die inverse Matrix von A^T.

Aufgabe G18 (S)
ei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ ein beliebige 2×2 Matrix.

Zeigen Sie, dass dann

$$X^2 + \mathrm{Sp}(x) \cdot X + \det(x) \cdot E_2 = 0$$

gilt. Dabei ist

- $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$
- $\det(X) = ad - bc \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{Sp}(X) = a + d \in \mathbb{R}$.

Lösung: Es gilt:

$X^2 + \mathrm{Sp}(x) \cdot X + \det(x) \cdot E_2$
$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + ad \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + ad \\ ac + cd & ac + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hausübung

Aufgabe H12 (Ein geometrisches Beispiel für ein lineares Gleichungssystem) (5 Punkte)
In dieser Aufgabe soll der Mittelpunkt und der Radius eines Kreises bestimmt werden, auf dem die Punkte $(-1,3),(0,4)$ und $(4,-2)$ liegen.

Allgemein ist ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch eine Gleichung der Form

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = c \tag{1}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $c > 0$.

(a) Welche geometrischen Größen des Kreises werden durch die Konstanten a, b und c beschrieben?

(b) Um die Konstanten a, b und c mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmen zu können, muss man zunächst eine Umformung durchführen. Ausmultiplizieren der Gleichung (1) und Subtrahieren von $a^2 + b^2$ ergibt die Gleichung $x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = c - a^2 - b^2$. Setzt man nun noch $\widetilde{c} = c - a^2 - b^2$, so erhält man die Gleichung

$$x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = \widetilde{c}\,. \tag{2}$$

Welche Bedingungen müssen nun für die Konstanten a, b und $\widetilde{c}$ gelten, damit die Gleichung (2) einen Kreis beschreibt?

(c) Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises durch die Punkte $(-1,3),(0,4)$ und $(4,-2)$ indem Sie die Werte in die Gleichung (2) einsetzen und das zugehörige Gleichungssystem lösen.

Lösung:

(a) Der Punkt (a, b) ist der Mittelpunkt des Kreises. Das Quadrat des Radius ist c.

(b) Es muss natürlich $a, b, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$ gelten. Eine weitere Bedingung ergibt sich aus $0 < c = \widetilde{c} + a^2 + b^2$, d.h es muss $\widetilde{c} > -a^2 - b^2$ gelten.

(c) Durch Einsetzen der Werte in die Gleichung (2) erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 1 & + & 2a & + & 9 & - & 6b & = & \widetilde{c} \\ 0 & - & 0 & + & 16 & - & 8b & = & \widetilde{c} \\ 16 & - & 8a & + & 4 & + & 4b & = & \widetilde{c}\,. \end{array}$$

Daraus ergibt sich durch vertauschen der letzten beiden Zeilen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & - & 6b & - & \widetilde{c} & = & -10 \\ -8a & + & 4b & - & \widetilde{c} & = & -20 \\ & - & 8b & - & \widetilde{c} & = & -16\,. \end{array}$$

Addiert man das 4-fache der ersten Gleichung zur zweiten, so ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & - & 6b & - & \widetilde{c} & = & -10 \\ & - & 20b & - & 5\widetilde{c} & = & -60 \\ & - & 8b & - & \widetilde{c} & = & -16\,. \end{array}$$

Nun dividiert man die zweite Gleichung durch -5 und erhält

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & - & 6b & - & \widetilde{c} & = & -10 \\ & + & 4b & + & \widetilde{c} & = & 12 \\ & - & 8b & - & \widetilde{c} & = & -16\,. \end{array}$$

Durch Addition des Zweifachen der zweiten Gleichung zur Dritten ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & - & 6b & - & \widetilde{c} & = & -10 \\ & + & 4b & + & \widetilde{c} & = & 12 \\ & & & + & \widetilde{c} & = & 8\,. \end{array}$$

Nun kann man die Lösung berechnen:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{c} & = & 8 \\ b & = & \frac{12-\widetilde{c}}{4} = \frac{12-8}{4} = 1 \\ a & = & \frac{-10+\widetilde{c}+6b}{2} = \frac{-10+8+6}{2} = 2\,. \end{array}$$

Weiter ergibt sich $c = \widetilde{c} + a^2 + b^2 = 8 + 2^2 + 1^2 = 13$.
Der Mittelpunkt des Kreises ist also der Punkt $(2,1)$ und der Radius ist $\sqrt{13}$.

Aufgabe H13 (Spur)
Sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{R})$ eine $n \times n$ Matrix.

$$\mathrm{Sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

bezeichnet die so genannte *Spur* der Matrix A.

(a) Zeige, dass gilt: für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ gilt: $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$
(b) Zeige, dass gilt: ist $X \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar, dann gilt: $\mathrm{Sp}(XAX^{-1}) = \mathrm{Sp}(A)$

Lösung:

(a) Es gilt:
$\mathrm{Sp}(AB)$

$$= \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(a_{1j}\cdot b_{j1}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n}(a_{1j}\cdot b_{jn}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}(a_{nj}\cdot b_{j1}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n}(a_{nj}\cdot b_{jn}) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\cdot b_{ji}))$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\cdot b_{ji}))$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}(b_{ji}\cdot a_{ij}))$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}(b_{ij}\cdot a_{ji}))$$

$$= \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(b_{1j}\cdot a_{j1}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n}(b_{1j}\cdot a_{jn}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}(b_{nj}\cdot a_{j1}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n}(b_{nj}\cdot a_{jn}) \end{pmatrix}$$

$= \mathrm{Sp}(BA)$

(b) Nach Aufgabenteil (a) folgt:
$\mathrm{Sp}(XAX^{-1}) = \mathrm{Sp}(AXX^{-1}) = \mathrm{Sp}(AE) = \mathrm{Sp}(A)$