Lineare Algebra 1
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

04.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G14
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a)

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & +y & -z & +t & = 0 \\ x & +3y & & -t & = 1 \\ & y & & +t & = -2 \\ & -2y & & -2t & = 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 0 \\ x & -y & +z & = 0 \\ -x & -y & -z & = 0 \end{array}$$

Lösung:

(a) Multiplizieren Sie die vorletzte Zeile mit -2. Daraus folgt $-2y-2t=4$. Aber gemäß der letzten Zeile gilt $-2y-2t=1$, was ein Widerspruch ist. Deshalb gibt es keine Lösung.

(b) Die letzte Zeile ist wie die erste, die mit -1 multipliziert wurde. Aus der ersten Zeile minus der zweiten Zeile, leitet man $y=0$ her. Aus der Summe der zwei ersten Zeilen, folgt $z=-x$. Die Lösungsmenge ist also $\{(x,y,z) \mid y=0 \land z=-x\}$.

Aufgabe G15 (Inverse und Transponierte einer Matrix)
Beweisen Sie:

- $(A+A')B = AB + A'B$
- $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

Lösung:

Aufgabe G16 (Vektoren- und Matrizenmultiplikation)
Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Wann ist $\alpha \cdot \beta$ definiert, wobei $\alpha, \beta \in \{x, y, z, A, B, C\}$? Berechnen Sie gegebenenfalls die resultierende Matrix.

(b) Wenn $\alpha \cdot \beta$ nicht definiert ist, bestimmen Sie ob $\alpha^t \cdot \beta$ definiert ist, wobei β kein Vektor ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die resultierende Matrix.

(c) Berechnen Sie $\alpha \cdot \alpha^t$ und $\alpha^t \cdot \alpha$ wobei $\alpha \in \{x, y, z\}$.

Lösung:

(a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C\vec{x} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $AA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $CB = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{x}^t A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^t B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{z}^t C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{x}^t \cdot \vec{x} = (5)$, $\vec{y}^t \cdot y = (10)$, $\vec{z}^t \cdot z = (5)$. $\vec{x} \cdot \vec{x}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} \cdot \vec{y}^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{z} \cdot \vec{z}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hausübung

Aufgabe H9 (Parameter in LGS) (5 Punkte)

Verwendend Gauss - Jordan - Algorithmus bestimmen Sie den Wert von k so dass das System

$$E[k] \begin{cases} x \phantom{{}+ky} - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

(a) eindeutige Lösung besitzt

(b) keine Lösung besitzt

(c) mehr als eine Lösung besitzt

Lösung:

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 2 & k \end{array}\right| \begin{array}{c} -3 \\ -2 \\ 1 \end{array} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & k & 5 \\ 0 & 2 & k+3 \end{array}\right| \begin{array}{c} -3 \\ 4 \\ 4 \end{array} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & k & 5 \\ 0 & 0 & k(k+3)-10 \end{array}\right| \begin{array}{c} -3 \\ 4 \\ 4k-8 \end{array}$$

Im zweiten Schritt nehmne wir an: $k \neq 0$. (Falls $k = 0$ sieht man sofort, dass die Lösung eindeutig ist.) Nun formulieren wir um:

$$(k^2 + 3k - 10)x = 4k - 8 \quad \Longleftrightarrow \quad (k-2)(k+5)x = 4(k-2)$$

Man sieht leicht:

- Falls $k = 2$ ist, so existiert mehr, als eine Lösung (In der letzten Zeile steht dann $0 = 0$)
- Falls $k = -5$ ist, so existiert keine Lösung (Letzte Zeile: $0 = -28$)
- Falls $k \neq -5$ und $k \neq 2$ ist, so können wir die letzte Zeile durch $(k-2)(k+5)$ dividieren und erhalten eindeutige Lösung.

Aufgabe H10 (Invertierbare Matrizen) (7 Punkte)

Entscheiden Sie welche der folgenden quadratischen Matrizen invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie Rang folgender Matrizen:

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar.

(e) 3

(f) 2

Aufgabe H11 (6 Punkte)

Entscheiden Sie jeweils ob die folgenden Teilmengen M von $M_n(\mathbb{R}), n \geq 2$, abgeschlossen (d.h. $A \in M$, $B \in M \Rightarrow A+B \in M$ bzw. $A \cdot B \in M$) unter Matrizenaddition bzw. Multiplikation sind.

(a) Die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen.

(b) Die Menge aller Diagonalmatrizen.

(c) Die Menge aller Matrizen, bei denen die erste Zeile nur Nullen enthält.

(d) Die Menge aller Matrizen mit ausschließlich negativen Einträgen.

(e) Die Menge aller Matrizen mit rationalen Einträgen.

(f) Die Menge aller Matrizen, bei denen die Summe aller Einträge Null ergibt.

Lösung:

(a) Addition: Ja; Multiplikation: Ja, weil $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \times (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, wobei $c_{ij} = \sum_{1\leq k\leq n} a_{ik} b_{kj}$. Angenommen $j < i$, dann gilt entweder $k < i$ oder $j < k$, somit $a_{ik} = 0$ oder $b_{kj} = 0$. Daraus folgt $c_{ij} = 0$.

(b) Addition: Ja; Multiplikation: Ja.

(c) Addition: Ja; Multiplikation: Ja.

(d) Addition: Ja; Multiplikation: Nein, es wird nur positive Einträgen geben.

(e) Addition: Ja; Multiplikation: Ja, weil die Summe oder das Produkt zweier rationaler Zahlen wieder rational ist.

(f) Addition: Ja; Multiplikation: Nein, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.