Lineare Algebra 1
3. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

25.04.2012

Gruppenübung

Aufgabe G11 (Schreibweisen für Permutationen) (5 Punkte)
Sei σ eine Permutation. Da die Abbildung σ auf einer endlichen Menge definiert ist, kann man einfach die Bilder der Zahlen $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ einzeln angeben, um σ eindeutig festzulegen. Zum Beispiel ist durch

$$1 \mapsto 4, \qquad 2 \mapsto 1, \qquad 3 \mapsto 3, \qquad 4 \mapsto 2$$

eine vierstellige Permutation gegeben.

Eine andere häufig benutzte Möglichkeit, eine Permutation anzugeben, ist die sogenannte *Matrixschreibweise*. Hier werden die Bilder der einzelnen Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ in Form einer Tabelle angegeben, in der ersten Zeile die Elemente von $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ (meistens in aufsteigender Reihenfolge), in der zweiten Zeile jeweils darunter die Bilder dieser Elemente; die Tabelle wird in runde Klammern gesetzt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Die anfangs als Beispiel angegebene vierstellige Permutation wäre in dieser Schreibweise durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder auch durch} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bei der sogenannten *Tupelschreibweise* gibt man in einer Zeile nacheinander die Bilder der Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$, durch Kommata getrennt, als ein n-Tupel an:

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)).$$

Unsere obige Beispielpermutation würde also $(4, 1, 3, 2)$ notiert werden.

Bei der *Zykelschreibweise* geht man wie folgt vor: Man beginnt mit einem (beliebigen) Element $a \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, ermittelt das Bild $\sigma(a)$ dieses Elementes, dann $\sigma(\sigma(a))$, dann $\sigma(\sigma(\sigma(a)))$, usw. Nach einer Anzahl von Schritten gelangt man wieder zum Element a zurück, mit anderen Worten, man hat einen *Zykel* der Permutation gefunden. Man schreibt nun $(a\ \sigma(a)\ \sigma^2(a)\ \dots\ \sigma^k(a))$ auf, wobei $\sigma^k(a)$ das letzte Element der Folge ist, bevor man zu a zurückgelangt. Dann fährt man mit einem anderen Element, das noch nicht notiert wurde, fort und schreibt den entstehenden Zykel wieder in Klammern auf. Dies wiederholt man solange, bis alle Elemente notiert wurden.

Im obigen Beispiel erhält man, wenn man mit 1 beginnt, zunächst den Zykel (142), denn es gilt $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Das einzige verbleibende Element ist 3, es wird auf sich selbst abgebildet und erzeugt damit einen Zykel (3) der Länge eins. Die obige Beispielpermutation lautet also in Zykelschreibweise (142)(3).

Oft werden Zykel der Länge eins wieder gestrichen, so dass man stattdessen im Beispiel auch einfach (142) für σ schreiben kann.

(a) Notieren Sie die folgende Permutationen in Zykelschreibweise:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = (5, 4, 3, 2, 1).$$

(b) Geben Sie die folgenden siebenstelligen Permutationen in Matrixschreibweise an:

$$\pi = (1\ 6\ 4)(2\ 5)(3\ 7), \quad \phi = (1\ 2\ 3\ 4), \quad \psi = (1).$$

Lösung:

(a) In Zykelschreibweise: $\sigma = (1734)(25)(6)$, $\tau = (12)(34)$, $\rho = (15)(24)(3)$, dabei ist die Reihenfolge der Zykel egal, und auch innerhalb eines Zykels können die Elemente rotiert werden. Außerdem dürfen Zykel der Länge eins weggelassen werden. Es gilt also auch etwa $\sigma = (52)(7341)$.

(b) In Matrixschreibweise:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G12 (Skalarmultiplikation)
Für $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ ist die Skalarmultiplikation so definiert: $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Was könnten in diesem Zusammenhang die Begriffe Assoziativität, neutrale Elemente, inverse Elemente, Kommutativität und Distributivität bedeuten?

Zeigen oder widerlegen Sie die genannten Gesetze für die Skalarmultiplikation. Verwenden Sie dabei nur die entsprechenden Gesetze für die reellen Zahlen.

Lösung:

(a) Assoziativität: $\lambda \cdot (\mu \cdot (x, y)) = (\lambda \cdot \mu)(x, y)$

(b) Neutrale Elemente: $1 \cdot (x, y) = (x, y)$

(c) Inverse Elemente: sinnlos.

(d) Kommutativität: $\lambda \cdot (\mu \cdot (x, y)) = \mu \cdot (\lambda \cdot)(x, y)$

(e) Distributivität: $\lambda((x, y) + (z, t)) = \lambda(x, y) + \lambda(z, t)$ und $(\lambda + \mu)(x, y) = \lambda(x, y) + \mu(x, y)$

Aufgabe G13 (Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten)
Wir betrachten die lineare Gleichung

$$-2x_1 + x_2 = -2\,. \tag{1}$$

(a) Geben Sie die Lösung der Gleichung (1) in der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ an. Dabei sollen a_1, a_2, b_1 und b_2 reelle Zahlen sein.
Die Angabe der Lösung in dieser Form nennt man Vektorschreibweise.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Graph die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist. Skizzieren Sie den Graph von f. Wie hängt dieser Graph mit der Darstellung der Lösung aus dem ersten Aufgabenteil zusammen?

(c) Lösen Sie auf analoge Weise die Gleichung $2x_1 + 3x_2 = 10$ einmal in Vektorschreibweise und einmal als Graph einer linearen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(d) Nun betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & x_2 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 10\,, \end{array}$$

welches aus den beiden bisher betrachteten Gleichungen besteht. Bestimmen sie alle Lösungen dieses Systems! Wie lässt sich die Lösung geometrisch interpretieren.

Lösung:

(a) Durch Umstellen der Gleichung (1) ergibt sich $x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_2$. Indem man $x_2 = \lambda$ setzt erhält man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Alternativ kann man die Gleichung zu $x_2 = -2 + 2x_1$ umstellen und erhält mit $x_1 = \lambda$ die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Natürlich sind auch andere Darstellungen vorstellbar.

(b) Aus der zu (1) äquivalenten Gleichung $x_2 = -2 + 2x_1$ ergibt sich sofort die Abbildungsvorschrift

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; x_1 \mapsto -2 + 2x_1 \,.$$

In der Darstellung (3) entspricht der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gerade der Richtung der linearen Funktion f während $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Punkt auf dem Graphen von f ist. In der Darstellung (2) gilt ähnliches. Hier muss man allerdings die Rollen von x und y vertauschen. Entsprechend betrachtet man als Funktion die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; x_2 \to 1 + \frac{1}{2}x_2$.

(c) Durch Umstellen ergibt sich $x_2 = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_1$. Die Vektorschreibweise ist dann

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

Als Abbildungsvorschrift ergibt sich $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; x \mapsto \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x$.

(d) Die einzige Lösung des Gleichungssystems ist $(x_1, x_2) = (2, 2)$. Dies ist genau der Schnittpunkt der beiden Geraden $f(\mathbb{R})$ und $g(\mathbb{R})$.

Hausübung

Aufgabe H7 (Permutationen) (5 Punkte)

Betrachten Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie die Menge der Inversionen von σ.

(b) Schreiben Sie σ als Zusammensetzung von disjunkten Zyklen.

(c) Schreiben Sie σ als Zusammensetzung von Transpositionen.

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Lösung:

(a) Die Menge der Inversionen von σ ist

$$\{(1,2),(1,4),(1,6),(1,7),(1,9),(2,6),(2,7),(3,4),(3,6),(3,7),(3,9),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7),(5,9),(8,9)\}$$

(b) Es gilt

$$\sigma = (1\;\;6) \circ (2\;\;3\;\;7) \circ (5\;\;8\;\;9) .$$

(c) Wegen

$$\begin{aligned} (2\;\;3\;\;7) &= (2\;\;3) \circ (3\;\;7), \\ (5\;\;8\;\;9) &= (5\;\;8) \circ (8\;\;9) \end{aligned}$$

und der letzten Teilaufgabe ergibt sich

$$\sigma = (1\;\;6) \circ (2\;\;3) \circ (3\;\;7) \circ (5\;\;8) \circ (8\;\;9) .$$

(d) Aus Aufgabenteil (a) und der Definition des Vorzeichens einer Permutation ergibt sich

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{|I(\sigma)|} = (-1)^{17} = -1 .$$

Aufgabe H8 (Vektoren Addition und skalare Multiplikation) (5 Punkte)

Vektoren von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind Paare (x, y), wobei x und y reelle Zahlen sind. Die Addition zweier solcher Vektoren wird so definiert: $(x, y) +_v (x' + y') \stackrel{def}{=} (x + x', y + y')$ und man schreibt einfach $+$ statt $+_v$, wenn es selbsverständlich ist, worum es geht. $-(x, y)$ ist eine Notation für $(-x, -y)$. Zeigen Sie, dass die Vektoraddition die Gesetze der Assoziativität, des neutralen Elements, der inversen Elemente und der Kommutativität erfüllt.

Lösung:

(a) Assoziativität: $(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2))$ wegen der Definition der Vektoraddition. Daraus folgt $(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2)$ wegen der Assoziativität der Addition. Also ist $(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) = ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2)$ wegen der Definition der Vektoraddition.

(b) Neutrale Elemente: $(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1, a_2)$

(c) Inverse Elemente: $(a_1, a_2) + (-(a_1, a_2)) = (0, 0)$

(d) Kommutativität: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$