Lineare Algebra 1
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

19.04.2012

Gruppenübung

Aufgabe G6 (Einfache Potenzmengen)
Schreiben alle Elemente der Potenzmenge von

(a) $X := \emptyset$,

(b) $X := \{1\}$,

(c) $X := \{1,2\}$,

(d) $X := \{1,2,3\}$,

(e) der Potenzmenge von $X := \{3,4\}$.

Wieviel Elemente hat die Potenzmenge einer n-elementigen Menge für $n = 0,1,2,3$? Ist die Potenzmenge von X größer als X, kleiner oder gleich groß?

Aufgabe G7 (Injektiv, surjektiv in $\mathbb{R}$)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entscheiden Sie in den folgenden Fällen, ob f injektiv oder surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = -3x + 5$

(c) $f(x) = x^2$

Lösung:

(a) Sei y in $\mathbb{R}$. Für $x = y$, gilt $f(x) = y$. Also so ist f surjektiv.
Seien x und y in $\mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$. Wegen der Definition von f gilt $x = y$. Deshalb ist f injektiv.

(b) Sei y in $\mathbb{R}$ und $x = \frac{5-y}{3}$. Dann gilt $f(x) = y$. Also ist f surjektiv.
Seien x und y in $\mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$. Wegen der Definition von f gilt $-3x + 5 = -3y + 5$, d. h. $x = y$. Deshalb ist f injektiv.

(c) Es gibt kein x in $\mathbb{R}$, sodass $f(x) = -1$. Deshalb ist f nicht surjektiv.

(d) Wegen $f(-1) = 1 = f(1)$ ist f nicht injektiv.

Aufgabe G8 (Injektiv, surjektiv in $\mathbb{R}^2$)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. In diesen folgenden Fällen entscheiden Sie, ob f injektiv, surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f(x,y) = (x,y)$

(b) $f(x,y) = (x+1,-y)$

Lösung:

(a) Sei (x,y) in $\mathbb{R}^2$. Wegen der Definition gilt $f(x,y) = (x,y)$. Also ist f surjektiv.
Aus $f(x,y) = f(x',y')$ folgt $(x,y) = (x',y')$. Deshalb ist f injektiv.

(b) Sei (x,y) in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt $f(x-1,-y) = ((x-1)+1,-(-y)) = (x,y)$. Also ist f surjektiv.
Aus $f(x,y) = f(x',y')$ folgt $(x+1,-y) = (x'+1,-y')$, d. h. $x+1 = x'+1$ und $-y = -y'$. Daraus folgt $x = x'$ und $y = y'$, und $(x,y) = (x',y')$. Deshalb ist f injektiv.

Aufgabe G9 (Eigenschaften von Relationen)
Sei M eine Menge. Eine Relation R über $M \times M$ kann folgende Eigenschaften haben:

(a) *reflexiv:* $\forall x \in M : xRx$

(b) *symmetrisch:* $\forall x \in M : \forall y \in M : xRy \Rightarrow yRx$

(c) *transitiv:* $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$

(d) *antisymmetrisch:* $\forall x \in M : \forall y \in M : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

(e) *total:* $\forall x \in M : \forall y \in M : xRy \vee yRx$

Entscheiden Sie für die folgenden Relationen, welche der obigen Eigenschaften zutreffen.

(a) Sei M die Menge der Einwohner Darmstadts und R die Relation „x wohnt im selben Stadtteil wie y".

(b) Sei $M = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und sei R die Relation „x ist kleiner oder gleich y".

(c) Sei $M = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null und sei R die Relation „x ist Teiler von y".

(d) Sei $M = \mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ die Menge aller Teilmengen von $\{1,2\}$ und sei R die Relation „x ist Teilmenge von y".

Eine Relation auf $M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist; sie heißt *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Ein Halbordnung, die total ist, heißt *lineare Ordnung*. Entscheiden Sie, welche der drei genannten Begriffe auf die obigen Beispiele von Relationen zutreffen.

Lösung:

(a)
- R ist reflexiv, weil x im selben Stadtteil wie x wohnt.
- Wenn x im selben Stadtteil wie y wohnt, so wohnt y im selben Stadtteil wie x. Deshalb ist R symmetrisch.
- Seien x, y und z drei Bewohner Darmstadt. Angenommen, dass x im selben Stadtteil wie y wohnt und y im selben Stadtteil wie z wohnt. Daraus folgt, daß x im selben Stadtteil wie z wohnt. Das heißt, R ist transitiv.
- Angenommen, dass es einen Stadtteil gibt, wo mindestens zwei verschiedene Personen wohnen. Seien x und y solche Personen. Wegen der Annahme wohnt x im selben Stadtteil wie y. Wegen der Annahme wohnt auch y im selben Stadtteil wie x. Nach Annahme sind x und y ungleich. Daraus folgt, dass R nicht antisymmetrisch ist.
- Angenommen, dass es zwei Stadtteile gibt, wo mindestens eine Person wohnt. Seien x und y zwei Bewohner verschiedener Stadtteile. x wohnt nicht im selben Stadtteil wie y und y wohnt nicht im selben Stadtteil wie x. Daraus folgt, dass R nicht total ist.

(b) Die Relation $\leq$ ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und total. Sie ist aber nicht symmetrisch.

(c) Die Relation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Sie ist aber nicht symmetrisch und nicht total. Z.B. is 2 kein Teiler von 3 und 3 ist auch kein Teiler von 2.

(d) Die Relation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Sie ist aber nicht symmetrisch und nicht total. Z.B. ist $\{1\}$ keine ist Teilmenge von $\{2\}$ und $\{2\}$ ist auch keine ist Teilmenge von $\{1\}$.

Somit ist (a) eine Äquivalenzrelation, (b), (c) und (d) sind Halbordnungen, (b) sogar eine lineare Ordnung.

Aufgabe G10 (Abbildung, Teilmenge und Schnittmenge)
Seien M und N zwei Mengen und f eine Abbildung von M nach N. Seien A und B zwei Teilmenge von M

(a) Wenn $A \subseteq B$, wie kann man $f(A)$ und $f(B)$ vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Für beliebige A und B, wie kann man $f(A \cap B)$ und $f(A) \cap f(B)$ vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Angenommen $A \subseteq B$. Wenn $f(A)$ die leere Menge ist, gilt $f(A) \subseteq f(B)$. Jetzt angenommen, dass $f(A)$ nicht leer ist. Sei y in $f(A)$. Wegen der Definition $f(A) = \{y \in N \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$ sei x in M, sodass $f(x) = y$. Wegen $A \subseteq B$ ist auch x in B. Daraus folgt, dass $y = f(x)$ auch in $f(B)$ ist. Das gilt für alle y in $f(A)$, d.h. $f(A) \subseteq f(B)$.

(b) $A \cap B \subseteq A$ gilt wegen der Definition der Schnittmenge. Daraus folgt $f(A \cup B) \subseteq f(A)$ wegen der obigen Teilaufgabe. Ebenso gilt $f(A \cup B) \subseteq f(B)$. Wegen der Definition der Schnittmenge folgt $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Sei $f : \{0,1\} \to \{2\}$. Dann ist $f(\{0\}) \cap f(\{1\}) = \{2\}$ und $f(\{0\} \cap \{1\}) = \emptyset$.

Hausübung

Aufgabe H4 (Eigenschaften der Injektivität und der Surjektivität) (5 Punkte)
Seien A, B und C drei Mengen. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktion.

(a) Angenommen, dass $g \circ f$ bijektiv ist, zeigen Sie, dass f injektiv ist und g surjektiv ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel, damit $g \circ f$ nicht bijektiv ist, obwohl f injektiv ist und g surjektiv ist.

(c) Finden Sie ein Beispiel, damit $g \circ f$ bijektiv ist, obwohl f nicht surjektiv ist und g nicht injektiv ist.

Lösung:

(a) Sei $x, y \in A$, damit $f(x) = f(y)$. Es gilt $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Daraus folgt $x = y$, weil $g \circ f$ bijektiv ist. Deshalb ist f injektiv. Sei $y \in C$. Es gibt $x \in A$, damit $g \circ f(x) = y$, weil $g \circ f$ bijektiv ist. Deshalb ist g surjektiv.

(b) $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ sodass $f(x) = x$ und $g : \{0,1\} \to \{0\}$.

(c) $f : \{0\} \to \{0,1\}$ sodass $f(0) = 0$ und $g : \{0,1\} \to \{0\}$.

Aufgabe H5 (Abbildungen) (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Bildmenge folgender Abbildungen (Funktionen) von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Skizzieren Sie diese in einem rechtwinkligen Koordinatensystem und geben Sie an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

   i. $f_1(x) = 10$
   ii. $f_2(x) = x^2 + 2$
   iii. $f_3 : x \mapsto x^3$
   iv. $f_4(x) = \sqrt{x}$
   v. $f_5 : x \mapsto |x| - x$
   vi. $f_6(x) = (\mathrm{sgn}(x))^2$

(b) Geben Sie das Urbild der Zahl 4 bezüglich f_2, f_4 und f_5 an.

(c) Welche Funktionen besitzen eine Umkehrabbildung (Umkehrfunktion)?

(d) Berechnen Sie die Kompositionen (Verknüpfungen) $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_3$, $f_6 \circ f_5$ und berechnen Sie $(f_2 \circ f_3)(5)$ und $(f_3 \circ f_2)(5)$.

Lösung:

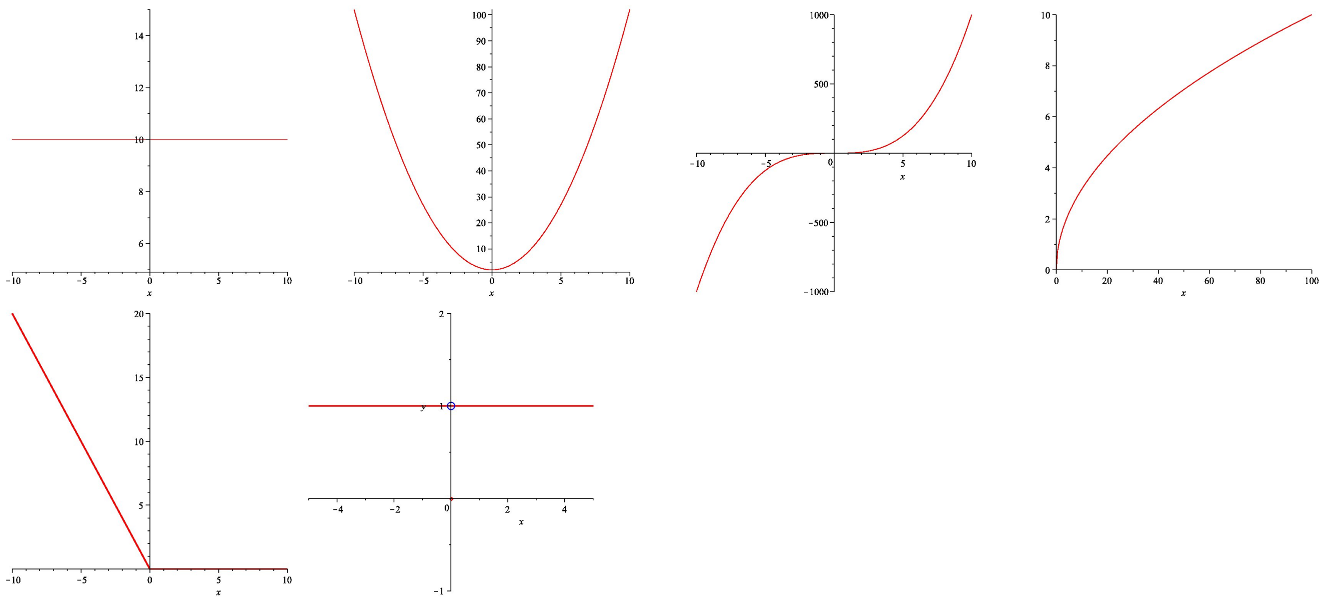

Abbildung 1: Die Graphen zu den Funktionen f_1 bis f_6.

(a) i. Die rechte Seite ist für alle reellen Zahlen definiert, also gilt $D(f_1) = \mathbb{R}$. Wegen $f_1(0) = f_1(1) = 10$ ist die Funktion nicht injektiv. Die Bildmenge ist $B(f_1) = \{10\} \neq \mathbb{R}$, somit ist f_1 auch nicht surjektiv. Es folgt, f_1 ist nicht bijektiv.

ii. Auch hier gilt $D(f_2) = \mathbb{R}$. Es gilt $f_2(1) = 3 = f_2(-1)$, somit ist die Funktion nicht injektiv und damit auch nicht bijektiv. $B(f_2) = [2, \infty[$, da z.B. $1 \notin B(f_2)$ ist f_2 auch nicht surjektiv.

iii. $D(f_3) = \mathbb{R}$, $B(f_3) = \mathbb{R}$, die Funktion ist injektiv und surjektiv, also auch bijektiv. Eine Begründung wird hier nicht verlangt.

iv. $D(f_4) = [0, \infty], B(f_4) = [0, \infty]$. Die Funktion ist injektiv, da zu jeder nicht negativen reellen Zahl genau eine Quadratwurzel existiert, sie ist aber nicht surjektiv ($-1 \notin B(f_4)$). Damit also auch nicht bijektiv.

v. $D(f_5) = \mathbb{R}$, $B(f_5) = [0, \infty]$. Wegen $f_5(0) = f_5(1) = 0$ nicht injektiv und da $-1 \notin B(f_5)$ nicht surjektiv. Insbesondere ist f_5 nicht bijektiv.

vi. $D(f_6) = \mathbb{R}$, $B(f_6) = \{1, 0\}$. Da $B(f_6) \neq \mathbb{R}$, kann die Funktion nicht surjektiv sein. Sie ist außerdem auch nicht injektiv, da beispielsweise $f(-1) = f(1) = 1$. Es folgt, dass sie auch nicht bijektiv ist.

(b) Urbilder von 4 bzg. f_2 sind $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.
Urbild von 4 bzg. f_4 ist 16.
Urbild von 4 bzg. f_5 ist -2 (für $x < 0$, $f_5(x) = -2x$, für $x > 0$, $f_5(x) = 0$).

(c) Die Funktionen, die eine Umkehrfunktion besitzen, sind f_3 und f_4 (da sie injektiv sind).

(d) $f_1 \circ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 10$, $(f_2 \circ f_3)(x) = (x^3)^2 + 2$ und $(f_6 \circ f_5)(x) = (sgn(|x| - x))^2$. $(f_2 \circ f_3)(5) = f_2(f_3(5)) = 15.627$, $(f_3 \circ f_2)(5) = 19.683$.

Aufgabe H6 (Abbildungen) (5 Punkte)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$, so ist $m = n$.