Lineare Algebra 1
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

12.04.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Logisch?)

(a) Folgt aus „Wenn es regnet, gibt es Wolken.“, dass es keine Wolken gibt, wenn es nicht regnet?

(b) Stellen Sie den obigen Schluss mithilfe der Aussagenlogik dar und begründen Sie, warum er falsch ist.

Lösung:
Angenommen, dass die Variable p stellt dar, dass es regnet und die Variable q stellt dar, dass es Wolken gibt. Die Aussage „Wenn es regnet, gibt es Wolken.“ wird durch $p \Rightarrow q$ dargestellt und dass es keine Wolken gibt, wenn es nicht regnet wird durch $\neg p \Rightarrow \neg q$ dargestellt. Wenn p falsch ist und q wahr ist, ist $p \Rightarrow q$ erfüllt, die Aussage $\neg p \Rightarrow \neg q$ aber nicht.

Aufgabe G2 (Beweise mithilfe der Wahrheitstafeln)
Welche der folgenden aussagelogischen Formeln sind allgemein gültig? Welche sind immer falsch? Welche sind zueinander äquivalent?

(a) $p \vee \neg p$

(b) $p \Rightarrow (q \vee \neg q)$

(c) $p \wedge \neg p$

(d) $p \vee p$

(e) $p \wedge p$

(f) $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$

Lösung:
(a), (b) und (f) sind allgemein gültig, deshalb sind sie zueinander äquivalent; (c) ist immer falsch; (d) und (e) sind manchmal, aber nicht immer gültig. Außerdem sind (d) und (e) äquivalent.

Aufgabe G3 (Mengenoperationen)
Seien M eine Menge und A, B und C Teilmengen von M.

(a) Beweisen Sie $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$.

(b) Vervollständigen und beweisen Sie $A \cup \emptyset =?$ und $A \cap \emptyset =?$.

(c) Vergleichen Sie $(A \cup B) \cup C$ und $A \cup (B \cup C)$. Welche einfachere Notation kann man daraus herleiten?

Gibt es ähnliche Regeln in der Aussagenlogik?

Lösung:

(a) Folgt aus der Kommutativität von $\vee$ und $\wedge$.

(b) $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(c) Die Aussage $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ folgt aus der Assoziativität von $\vee$. Deshalb darf man $A \cup B \cup C$ schreiben.

Aufgabe G4 (Quantoren)
Entscheiden Sie, welche Aussagen über die natürlichen Zahlen wahr sind.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq n$

(b) $\exists n \in \mathbb{N} : 3 \leq n$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \leq n$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : k = 2n$

(e) $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : k = 2n$

(f) $\forall k \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : k = 2n$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung:

(a), (b) und (d) sind wahr.

Aufgabe G5 (Kartesisches Produkt)

(a) Was sind die Elemente des Produkt $(\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\})$?

(b) Was sind die Elemente des Produkts $\{1, 2, 3\} \times \{0\}$?

(c) Sei A eine Menge mit n Elemente. Wie viele Elemente gibt es in $A \times \{3\}$?

(d) Was sind die Elemente des Produkts $\{1, 2, 3\} \times \emptyset$? Was ist eigentlich die Menge $\{1, 2, 3\} \times \emptyset$?

Lösung:

(a) $(1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5)$.

(b) $(1, 0), (2, 0), (3, 0)$.

(c) n Elemente.

(d) Es gibt kein Element, weil $\{1, 2, 3\} \times \emptyset = \emptyset$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Wahrheitstafeln) (6 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die folgenden Aussagen allgemeingültig sind, indem Sie Wahrheitstafeln aufstellen.

(a) $p \Leftrightarrow p$

(b) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$

(c) $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Lösung:

Mithilfe der Wahrheitstafeln.

Aufgabe H2 (Quantoren, de Morgansche Regeln) (5 Punkte)

Sei M eine Menge. Drücken Sie die Negationen der folgenden Aussagen so aus, dass die Negationssymbole so weit rechts wie möglich stehen.

(a) $\forall x \in M : \exists y \in M : P(x, y)$

(b) $\forall x \in M : P(x) \vee Q(x)$

(c) $\forall x \in M : P(x) \vee (\forall y \in M : Q(y))$

(d) $\forall x \in M : P(x) \vee (\exists y \in M : Q(x, y) \wedge R(y))$

(e) $\forall x \in M : \exists y \in M : (P(y) \Rightarrow y = y)$

Lösung:

(a) $\exists x \in M : \forall y \in M : \neg P(x, y)$

(b) $\exists x \in M : \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$

(c) $\exists x \in M : \neg P(x) \wedge (\exists y \in M : \neg Q(y))$

(d) $\exists x \in M : \neg P(x) \wedge (\forall y \in M : \neg Q(x, y) \vee \neg R(y))$

(e) $\exists x \in M : \forall y \in M : (P(y) \wedge y \neq y)$

Aufgabe H3 (Mengen) (5 Punkte)

Seien M eine Menge und A und B Teilmenge von M. Vergleichen Sie die folgenden Mengen.

(a) Vergleichen Sie $M \setminus (A \cup B)$ und $(M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.

(b) Vergleichen Sie $M \setminus (A \cap B)$ und $(M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.

(c) Vergleichen Sie $(M \setminus A) \setminus B$ und $(M \setminus B) \setminus A$.

(d) Vergleichen Sie $(M \setminus A) \setminus B$ und $M \setminus (B \setminus A)$.

Gibt es ähnliche Regeln in der Aussagenlogik?

Lösung:

Es gelten:

(a) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.

(b) $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.

(c) $(M \setminus A) \setminus B = (M \setminus B) \setminus A$.

(d) $(M \setminus A) \setminus B \subseteq M \setminus (B \setminus A)$.

Sei $x \in M \setminus (A \cup B)$. Dann gilt $x \notin A \cup B$, also $x \notin A$ und $x \notin B$, somit $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$, also $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$. Dies zeigt $M \setminus (A \cup B) \subseteq (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$. Ähnlich zeigt man $M \setminus (A \cup B) \supseteq (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$ und die anderen Fälle.

Bei der letzten Aussage gilt die andere Inklusion ($\supseteq$) nicht: Seien z.B. alle drei Mengen $M = A = B$ gleich und nicht leer, dann ist $(M \setminus A) \setminus B = \emptyset \setminus M = \emptyset$, aber $M \setminus (B \setminus A) = M \setminus \emptyset = M$.