Klausur „Lineare Algebra 1“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SS 2012**
M. Schneider

Tragen Sie in die nachstehenden Zeilen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.

Name: .... | Matr. Nr.: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	2	2	3	4	5	3	3	22	
erreichte Punktzahl									

Hinweise:

a) Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 90 Minuten.

b) Als Hilfsmittel zur Klausur sind zugelassen: keine.

c) Mobiltelefone sind auszuschalten und in der Tasche zu verstauen.

d) Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis zusammen mir einem Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.

e) **Viel Erfolg!**

1. Aufgabe (2 Punkte)

Es seien X und Y Vektorräume über K.

(a) Geben Sie eine mathematische Definition der *Dimension von* X.

(b) Wie lautet die Dimensionsformel für einen Vektorraumhomomorphismus $\phi \in Hom(X, Y)$.

2. Aufgabe (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Inverse der reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Signatur der Permutation $\sigma \in S_3$ definiert durch

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe (3 Punkte)

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $(L)\ Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme durch eine Rechnung die Lösungsmenge von (L).

4. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachte $\phi \in Hom(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ definiert durch

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := x_1 + 2x_2 + 3x_3.$$

(a) (1P) Bestimmen Sie die Dimension von Kern ϕ.

(b) (2P) Bestimmen Sie die Dimension von Kern $\phi \cap U$, wobei

$$U := span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) (1P) Bestimmen Sie einen Untervektorraum W von $\mathbf{R}^3$ mit $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

Alle Antworten sind zu begründen, etwa durch eine Rechnung.

5. Aufgabe (5 Punkte)

Betrachte $\phi \in Hom(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^4)$ definiert durch

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

(a) (1P) Bestimmen Sie die Spur von ϕ.

(b) (2P) Bestimmen Sie eine Basis von Kern ϕ.

(c) (2P) Bestimmen Sie eine Basis von Bild ϕ.

Alle Antworten sind zu begründen, etwa durch eine Rechnung.

6. Aufgabe (3 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und U, W seien Untervektoräume von V mit $W \subseteq U$. Man zeige:

(a) (1P) $U/W := \{u + W : u \in U\}$ ist ein Untervektorraum von V/W.

(b) (2P) $(V/W)/(U/W)$ ist isomorph zu V/U.

7. Aufgabe (3 Punkte)

Man betrachte in $\mathbf{R}^3$

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(a) (1P) Man zeige, dass C eine Basis von $\mathbf{R}^3$ ist.

(b) (2P) Man bestimme durch eine Rechnung die Übergangsmatrizen $[id]_C^B$ und $[id]_B^C$.