# Lineare Algebra
# 12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**M. Schneider**
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

**28.06.2012**

## Gruppenübung

**Aufgabe G43** (Lineare Abbildung)
Betrachten Sie die folgende Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Welche davon sind linear? Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Matrix $[\phi]$ (bezüglich der Standardbasen).

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + 3y \\ -2z \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yx \\ zx \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |x| \\ |x| \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x-1)^2 + 3z - (x+1)^2 \\ \sqrt{4(z+1)^2 + (2z-2)^2 - 8} \end{pmatrix}$

**Aufgabe G44** (Basiswechsel)
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen

$$B = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } C = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und die Standardbasen

$$E_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } E_3 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$[\psi]_B^C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $[\psi]_{E_2}^{E_3}$.

(b) Gegeben sei weiterhin ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{E_3} := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestimme $[\psi(v)]_B$.

## Hausübung

**Aufgabe H34** (Matrizen linearer Abbildungen bezüglich verschiedener Basen)

(a) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis $B$ von $\mathbb{R}^2$ und eine Basis $C$ von $\mathbb{R}^2$, sodass die Matrix $[\varphi_1]_C^B$ der Abbildung bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix ist.

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis $D$ von $\mathbb{R}^3$ und eine Basis $F$ von $\mathbb{R}^4$, sodass die Matrix $[\varphi_1]_F^D$ der Abbildung bezüglich dieser Basen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

Hinweis: In der Vorlesung wurde ein Satz bewiesen, der aussagt, dass man zu jeder linearen Abbildung Basen findet, so dass die zugehörige Matrix die Identität eventuell ergänzt um einige Nullzeilen und/oder Nullspalten ist.

**Aufgabe H35** (Basiswechsel) (5 Punkte)

$\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ bezeichne wie gewöhnlich die Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich $n$.

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \varphi(p)(x) := xp(x),$$

die Elemente $p_i(x) := x^i$, $q_i(x) := (x+1)^i$ für $i = 0, 1, \ldots, 3$ und die Basen

$$\begin{aligned} B &:= (p_0, p_1, p_2), \\ C &:= (p_0, p_1, p_2, p_3), \\ C' &:= (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ bzw. von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie $[\varphi]_C^B$ und $[\varphi]_{C'}^B$.