Lineare Algebra
11. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

21.06.2012

Gruppenübung

Aufgabe G40 (Rang)
Es seien A und B reelle $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie dass

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$$

gilt.

Aufgabe G41 (Rang von Matrizen und Lösungen von Gleichungssystemen)
Gegeben seien die drei Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrizen A, B und C und die Dimension des Kerns der zu diesen Matrizen gehörigen linearen Abbildungen φ_A, φ_B und φ_C.

(b) Es sei D eine reelle $m \times n$-Matrix und $U := \ker \varphi_D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid D\vec{x} = \vec{0}\}$ der Kern der zugehörigen linearen Abbildung. Zeigen Sie dass für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $D\vec{x} = \vec{b}$ entweder leer ist oder die Gestalt $\vec{a} + U$ mit einem $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ hat.

(c) Wir betrachten die linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{a}$, $B\vec{x} = \vec{b}$ und $C\vec{x} = \vec{c}$. Ein solches lineares Gleichungssystem ist unlösbar oder es hat genau eine Lösung oder die Lösungsmenge ist eine Gerade, oder eine Ebene, oder ein dreidimensionales Gebilde, ...

Welche Fälle sind in obigen Gleichungssystemen jeweils möglich? Gib in den Fällen, die möglich sind, jeweils eine rechte Seite an, für die dieser Fall eintritt. Begründe in den übrigen Fällen, warum er jeweils nicht eintreten kann.

Aufgabe G42 (Matrizen und lineare Abbildungen)
Betrachten Sie die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sind die zugehörigen linearen Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Zeigen Sie ihre Behauptungen.

Hausübung

Aufgabe H32 (Bewegungen im $\mathbb{R}^2$) (5 Punkte)
Als Bewegung im $\mathbb{R}^2$ werden Spiegelungen, Drehungen und beliebige Zusammensetzungen von Spiegelungen und Drehungen bezeichnet. Drehungen um den Koordinatenursprung in $\mathbb{R}^2$ und Spiegelungen an einer Gerade durch den Koordinatenursprung sind lineare Abbildungen.

(a) Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Matrix A an, sodass $\varphi = \varphi_A$ die Multiplikation mit A ist. Stellen Sie einige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und ihre Bilder unter φ graphisch dar. Welche Bewegung im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Abbildung beschrieben?

(b) Es sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Matrix A_α an, sodass $\varphi_\alpha = \varphi_{A_\alpha}$ die Multiplikation mit A_α ist. Stellen Sie einige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und ihre Bilder unter φ graphisch dar. Welche Bewegung im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Abbildung beschrieben?

(c) Es sei χ_1 die Abbildung, welche die Spiegelung an der x_1-Achse beschreibt. Geben Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für χ_1 an (in der Form, wie sie in den Aufgabenteilen (a) und (b) gegeben ist). Bestimmen Sie weiterhin eine Matrix B_1 mit $\chi_1 = \varphi_{B_1}$.

(d) Es sei χ_2 die Abbildung, welche die Spiegelung an Gerade $x_1 = x_2$ beschreibt. Geben Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für χ_2 an. Bestimmen Sie weiterhin eine Matrix B_2 mit $\chi_2 = \varphi_{B_2}$.

(e) Berechenen Sie $\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1$ auf zwei Arten:

(1) Setzen Sie die expliziten Abbildungsvorschriften ineinander ein

(2) Multiplizieren Sie die zu den Abbildungen gehörigen Matrizen in der richtigen Reihenfolge. Die zu der entstehenden Matrix gehörige Abbildung ist dann die gesuchte Zusammensetzung.

Ergeben beide Wege wirklich dasselbe Ergebnis? Welche der Abbildungen aus den vorherigen Aufgaben ist diese Zusammensetzung?

Aufgabe H33 (Duale Räume)
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Außerdem sei

$$q : V \to V/W, \qquad \vec{v} \mapsto \vec{v} + W$$

die natürliche Abbildung in den Quotientenraum. Wir betrachten die dualen Räume

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \text{ und } (V/W)^* = \mathrm{Hom}(V/W, \mathbb{K})\,.$$

(Der duale Raum zu einem Vektorraum ist immer die Menge aller linearen Abbildungen von dem Vektorraum nach $\mathbb{K}$. Dies ist wieder ein Vektorraum.) Gegeben sei weiterhin die Abbildung

$$q^* : (V/W)^* \to V^*, \qquad l \mapsto l \circ q\,.$$

Man beachte: in dieser Schreibweise ist l eine Abbildung von V/W nach $\mathbb{K}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* injektiv ist.

(d) Aus den bisherigen Aufgabenteilen folgt, dass $\mathrm{im}\, q^* = q^*((V/W)^*)$ ein Untervektorraum von V^* ist. D.h. der Vektorraum $V^*/q^*((V/W)^*)$ ist definiert.
Im Spezialfall von $V = \mathbb{K}^n$ gilt

$$\dim V^* = \dim V.$$

Diese Aussage ist für alle endlichdimensionalen Vektorräume richtig.
Wie groß ist die Dimension von $V^*/q^*((V/W)^*)$?