Lineare Algebra
10. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
M. Schneider **14.06.2012**
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

Gruppenübung

Aufgabe G36
Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\mathrm{im} f = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \ker f = \mathrm{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G37
Seien $U \subseteq V$ und $X \subseteq W$ vier $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und die Abbildung $F : V/U \to W/X$ definiert durch $\vec{v} + U \mapsto f(\vec{v}) + X$. Zeigen Sie, dass F wohldefiniert ist, genau dann, wenn $f(U) \subseteq X$ gilt.

Aufgabe G38 (Kanonische Faktorisierung)
Es sei V ein Vektorraum. Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: V \to V, \qquad \vec{v} \mapsto \vec{v} \text{ und} \\ \varphi_2 &: V \to V, \qquad \vec{v} \mapsto \vec{0}\,. \end{aligned}$$

Mittels des Homomorphiesatzes ergibt sich die Existenz von zwei Isomorphismen $\overline{\varphi_1}$ und $\overline{\varphi_2}$, die durch φ_1 bzw. φ_2 eindeutig bestimmt sind.

(a) Geben Sie die Abbildungsvorschrift von $\overline{\varphi_1}$ und $\overline{\varphi_2}$ an.

(b) Die Isomorphie welcher Vektorräume kann man daraus schließen?

Aufgabe G39 (Injektivität und Surjektivität)
Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ersetzen Sie in den folgenden drei Aussagen die Fragezeichen so, dass die Aussagen wahr sind.

(a) φ ist surjektiv $\Longleftrightarrow \dim(\mathrm{im}\varphi) = ?$

(b) φ ist injektiv $\Longleftrightarrow \dim(\ker \varphi) = ?$

(c) φ ist bijektiv $\Longleftrightarrow \dim V = ?$ und $\dim(\ker \varphi) = ?$

Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit ihrer Aussagen.
Betrachten Sie nun den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ der reellen Zahlenfolgen.

(d) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_1 : V \to V$ gibt, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(e) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_2 : V \to V$ gibt, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Hausübung

Aufgabe H29 (Lineare Abbildungen) (5 Punkte)
Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass es genau dann einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$ gibt, wenn $\dim V = \dim W$ gilt.

(b) Es sei U ein Untervektorraum von V und $\varphi : U \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\widetilde{\varphi} : V \to W$ gibt, für die $\widetilde{\varphi}|_U = \varphi$ gilt.

Aufgabe H30 (Fibonacci-Zahlen) (5 Punkte)
Man betrachte $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} | a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$

(a) Man zeige V ist ein $\mathbb{R}-$Vektorraum und bestimme $\dim V$.

(b) Man bestimme $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ derart, dass $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in V$ gilt.

(c) Man zeige $B = \{(q_1^n), (q_2^n)\}$ ist eine Basis von V.

(d) Man bestimme die Koordinaten der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in V$ mit $b_0 = 0, b_1 = 1$ bzgl. B insb. Formel für b_n.

Aufgabe H31 (Homomorphiesatz) (5 Punkte)
Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Außerdem sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $U \subseteq \ker \varphi$.

Nach dem Homomorphiesatz existiert dann eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\widetilde{\varphi} : V/U \to W$ mit

$$\varphi = \widetilde{\varphi} \circ q\,,$$

wobei $q : V \to V/U$ die bekannte Quotientenabbildung ist.

(a) Zeigen Sie

$$\ker \widetilde{\varphi} = (\ker \varphi)/U\,.$$

Machen Sie sich dazu als ersten Schritt klar, dass $(\ker \varphi)/U$ existiert und ein Untervektorraum von V/U ist.

(b) Zeigen Sie

$$\mathrm{im}\widetilde{\varphi} = \mathrm{im}\varphi\,.$$

(∗) Zeigen Sie:
Wenn φ surjektiv und $\ker \varphi = U$ ist, dann ist $\widetilde{\varphi}$ ein Isomorphismus.