Lineare Algebra
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

11.06.2012

Gruppenübung

Aufgabe G34 (Basis)
In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die linearen Teilräume

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad V := \operatorname{spann}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie je eine Basis von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Aufgabe G35
Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ und zwei weiteren Basen $B' = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ und $B'' = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$, wobei

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\vec{b}_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \vec{b}_2 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{b}_3 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\vec{c}_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, & \vec{c}_2 &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \vec{c}_3 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(a) Der Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Basis B' gegeben durch $[\vec{w}]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{w}$ bezüglich der Basis B.

(b) Der Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Standardbasis B gegeben durch $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich der Basis B'.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ bezüglich der Basis B'.

(d) Bestimme eine Matrix A_1 mit

$$[\vec{u}]_B = A_1 [\vec{u}]_{B'} \ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 .$$

(e) Bestimme eine Matrix A_2 mit

$$[\vec{u}]_{B'} = A_2 [\vec{u}]_{B''} \ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 .$$

Hausübung

Aufgabe H25 (Isomorphismen und Basen) (5 Punkte)
Es seien V und W zwei isomorphe $\mathbb{K}$-Vektorräume. D.h. es existiert ein Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to W$. Weiterhin sei $B \subset V$ eine Basis von V.

Zeigen Sie, dass dann $\varphi(B) := \{\varphi(\vec{v}) \mid \vec{v} \in B\}$ eine Basis von W ist.

Aufgabe H26 (Der Folgenraum) (5 Punkte)
Es sei $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der reellen Zahlenfolgen. Diese bildet mit den Operationen

$$\begin{aligned} + : V \times V \to V, &\qquad \big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und} \\ \cdot : \mathbb{R} \times V \to V, &\qquad \big(\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Ist die Teilmenge $U_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V,$ endlich viele der a_n sind ungleich Null $\}$ ein Untervektorraum von V? Zeigen Sie ihre Aussage.

(b) Ist die Teilmenge $U_2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V,$ endlich viele der a_n sind gleich Null $\}$ ein Untervektorraum von V? Zeigen Sie ihre Aussage.

(c) Besitzen U_1 bzw. U_2 eine Basis. Wenn ja, bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U_1 bzw. U_2.

(d) Was ist die Dimension von V?

(e) Bildet die in (c) bestimmte Basis von U_1 auch eine Basis von V?

Aufgabe H27 (Lineare Abbildungen und lineare Unabhängigkeit)
Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$. Zeigen Sie: Sind die Bilder $\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)$ linear unabhängig, so sind auch $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linear unabhängig.

Aufgabe H28

(a) Seien $V = U_1 \oplus U_2$ und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ gibt, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$.

(b) Sei V ein endlicher $\mathbb{K}$-Vektorraum und U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V. Angenommen, für je zwei lineare Abbildungen $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ gilt.