Lineare Algebra
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

31.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G29 (Vektorräume über endlichen Körpern)
Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen und V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum.

(a) Wieviele Elemente hat V?

(b) Wieviele geordnete Basen hat V?

(c) Wieviele Basen hat V?

(d) Berechnen Sie die Anzahl der Basen des $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

Aufgabe G30 (Linearkombinationen)
Seien $\vec{a} = (2, -1, 0, 4)$ und $\vec{b} = (-1, 3, 2, -1)$. Entscheiden Sie welche der folgenden Vektoren Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind.

(a) $\vec{c} = (3, 1, 2, 5)$

(b) $\vec{d} = (0, 5, 4, 2)$

Aufgabe G31 (Vektoren in $\mathbb{R}^3$)
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linear unabhängig?

(b) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linear unabhängig?

(c) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(d) Welche Teilmengen von $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Begründen Sie jeweils ihre Aussagen.

Aufgabe G32 (Lineare Unabhängigkeit)
Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := e^x, \quad f_2(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := \sin^2 x, \quad f_2(x) := \cos^2 x, \quad f_3(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(c) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := 1, \quad f_2(x) := x, \quad f_3(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie jeweils ihre Behauptungen.

Aufgabe G33 (Lineare Unabhängigkeit)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{4} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{3} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{0} \end{pmatrix}$$

im Vektorraum $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ linear abhängig sind.

Hausübung

Aufgabe H20 (Direkte Produkte und direkte Summe) (5 Punkte)

(a) Seien $V_1, V_2, \dots, V_n$ Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, für die $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ gilt.
Zeigen Sie, dass es in dieser Situation einen Vektorraumisomorphismus zwischen $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ und V gibt.

(b) Seien $V_1, V_2, \dots, V_n$ Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.
Weiter sei $i \in \{1, \dots, n\}$ und $U_i := \{(\underbrace{\vec{0}, \dots \vec{0}}_{i-1 \text{ mal}}, \vec{v}, \underbrace{\vec{0}, \dots, \vec{0}}_{n-i \text{ mal}}) \mid \vec{v} \in V_i\}$.

Zeigen Sie

- U_i ist ein Untervektorraum von V.
- Es gibt einen Vektorraumisomorphismus zwischen U_i und V_i.
- Es gilt $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_3$.

Aufgabe H21 (Basis und direkte Summe) (3 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U_1 \subseteq V$ ein Untervektorraum.
Zeigen Sie: Es gibt einen Untervektorraum $U_2 \subseteq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$.

Aufgabe H22 (5 Punkte)

(a) Seien $V = U_1 \oplus U_2$ und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ gibt, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$.

(b) Sei V ein endlicher $\mathbb{K}$-Vektorraum und U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V. Angenommen, für je zwei lineare Abbildungen $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ gilt.

Aufgabe H23 (Basis) (3 Punkte)

Bestimmen Sie für den von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ aufgespannten linearen Teilraum eine Basis.

Aufgabe H24 (Direkte Summe)

Seien V ein Vektorraum und A, B, C drei Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Aussagen Äquivalent sind.

(i) $A + B + C = A \oplus B \oplus C$

(ii) $A + B = A \oplus B$ und $(A + B) \cap C = \{\vec{0}\}$