Lineare Algebra
7. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

23.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G24 (Vektorräume)

(a) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum?

(b) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum?

(c) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Z}$-Vektorraum?

Dabei sollen die Addition und die skalare Multiplikation jeweils die bekannte Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ sein. Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe G25 (Vektorräume)
Es seien M eine beliebige Menge und V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathscr{F}(M,W)$ der Abbildungen von M nach W mit den üblichen Operationen

$$\begin{aligned} &+ : \mathscr{F}(M,W) \times \mathscr{F}(M,W) \to \mathscr{F}(M,W), && (f,g) \mapsto f+g && \text{mit} && (f+g)(x) := f(x) + g(x)\, \forall x \in M \text{ und} \\ &\cdot\ : \mathbb{K} \times \mathscr{F}(M,W) \to \mathscr{F}(M,W), && (\lambda, g) \mapsto \lambda g && \text{mit} && (\lambda g)(x) := \lambda \cdot g(x)\, \forall x \in M \end{aligned}$$

einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Hom}(V,W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, indem sie zeigen, dass es sich bei $\mathrm{Hom}(V,W)$ um einen Untervektorraum von $\mathscr{F}(V,W)$ handelt.

Aufgabe G26 (Vektorräume)
Zeigen Sie, dass $V = \mathbb{R}$ mit den folgenden Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

$$\begin{aligned} +_V &: V \times V \to V, && (x,y) \mapsto x + y - 1 \\ \cdot_V &: \mathbb{R} \times V \to V, && (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x - \lambda + 1 = \lambda x - \lambda + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe G27 (Untervektorräume)
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge von V.
Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.

(i) U ist ein Untervektorraum von V.

(ii) Es sind die zwei Bedingungen
  (1) U ist nicht leer und
  (2) für je zwei Elemente $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ und zwei Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \in U$$

erfüllt.

Aufgabe G28 (Lineare Abbildungen)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.$$

Bestimme ein Formel für $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{R}$.

Hausübung

Aufgabe H17 (Kern einer linearen Abbildung) (5 Punkte)
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Der Kern von f ist definiert als $\ker f = \{x \in V \mid f(x) = \vec{0}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\ker f$ ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
  (i) $\ker f = \{\vec{0}\}$.
  (ii) f ist injektiv.

Aufgabe H18 (Polynome) (5 Punkte)
Sei $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, wobei $\mathbb{R}[x] := \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, a_i \in \mathbb{R},\, 0 \le i \le n\right\}$ die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten und $D(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ ist.

(a) Ist $\mathbb{R}[x]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(b) Was ist $D(x^n)$?

(c) Ist D eine lineare Abbildung?

(d) Was ist der Kern von D?

Aufgabe H19 (Lineare Abbildungen) (5 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 3x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie durch konkretes Nachrechnen der definierenden Bedingung, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt. (Dabei bezeichnet $A\vec{v}$ wie gewöhnlich das Matrizenprodukt von A und $\vec{v}$.)

(c) Bestimmen Sie den Kern von f. Dieser ist definiert durch

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(0) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(\vec{v}) = 0\}\ .$$

Dabei bezeichnet $\vec{0}$ die Null in $\mathbb{R}^2$, also $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.