Lineare Algebra
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

16.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G19
Berechnen Sie das inverse Element bzgl. Multiplikation in der folgenden Gruppe:

(a) $\bar{3}$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
(b) $\bar{6}$ in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
(c) $\bar{8}$ in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
(d) $\bar{5}$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
(e) $\bar{5}$ in $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$
(f) $\bar{13}$ in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$

Aufgabe G20

(a) Wir betrachten die Gruppe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Gesucht ist $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, so dass $\{a^n | n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \backslash \{\bar{0}\}$ ist.
(b) Wir betrachten die Gruppe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Gesucht ist $a \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, so dass $\{a^n | n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \backslash \{\bar{0}\}$ ist.

Aufgabe G21 (Fehlstände)
Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Jedes Paar $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,n\}$ mit $i < j$, für das $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt, nennen wir einen *Fehlstand* oder auch eine *Inversion* von σ. Zum Beispiel wären für die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

genau die Paare $(1,2)$, $(1,4)$, $(3,4)$ die Fehlstände von σ.

(a) Bestimmen Sie alle Fehlstände von
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

($*$) Bestimmen Sie die Fehlstände aller Elemente von S_3.

($**$) Was ist die maximale Anzahl von Fehlständen, die eine Permutation $\sigma \in S_n$ haben kann? Geben Sie eine Permutation an, die diese maximale Anzahl von Fehlständen besitzt.

Aufgabe G22

Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und $a \in G$. Sei $f: \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto a \cdot x \end{array}$.

(a) Ist f injektiv?
(b) Ist f surjektiv?
(c) Wenn f bijektiv wäre, was wäre f^{-1}?

Aufgabe G23 (Abschwächung der Definition von Gruppen)
Sei G eine Menge und $*: G \times G \to G$. $(G,*)$ ist eine schwache Gruppe, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$.
- Linksneutrales Element: es gibt $e \in G$, mit $e * a = a$ für alle $a \in G$.
- Linksinverses Element: $\forall a \in G : \exists b \in G : \ b * a = e$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe auch eine schwache Gruppe ist.

(b) Umgekehrt wollen wir jetzt zeigen, dass eine schwache Gruppe auch eine Gruppe ist.
  i. Sei $a, b \in G$. Angenommen, es gilt $b * a = e$ und $c * b = e$, zeigen Sie, dass $a * b = (c * b) * (a * b)$.
  ii. Mithilfe der obigen Teilaufgabe, zeigen Sie dann, dass $a * b = e$, d.h. jedes linksinverse Element ist auch rechtsinvers.
  iii. Sei $a \in G$. Mithilfe der obigen Teilaufgabe, zeigen Sie dann, $a * e = a$, d.h. jedes linksneutrale Element ist auch rechtsneutral.

Hausübung

Aufgabe H14 (Symmetrische Gruppen) (7 Punkte)
Wir betrachten in dieser Aufgabe die Menge S_n aller n-stelligen Permutationen. Es bezeichnet $\circ : S_n \times S_n \to S_n$ die Verkettung von Permutationen.

(a) Zeigen Sie, dass $\circ$ auf S_n assoziativ ist. Tipp: Betrachten Sie die Permutationen in dieser Teilaufgabe am besten als Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ in sich.

(b) Berechnen Sie alle möglichen Verkettungen von Elementen in S_3. Stellen Sie diese in einer Verknüpfungstabelle dar.

(c) Zeigen Sie, dass S_3 mit der Verkettung $\circ$ eine Gruppe bildet. Was ist das neutrale Element?

(d*) Welche Elemente von S_3 haben eine gerade Anzahl von Fehlständen?

(e*) Eine Untergruppe einer gegebenen Gruppe G ist eine Teilmenge von G, die mit der Operation und dem neutralen Element von G selbst wieder eine Gruppe bildet.
Ist die Teilmenge der Permutationen mit gerader Anzahl von Fehlständen in S_3 eine Untergruppe?

(f*) Geben Sie alle Untergruppen von S_3 an.

(g*) Zeigen Sie, dass S_n für alle natürlichen Zahlen n eine Gruppe ist.

Aufgabe H15 (Gruppen) (5 Punkte)
Geben Sie an, welche der folgenden Mengen Gruppen sind. Zeigen Sie bei den Mengen, die keine Gruppen sind, welche Gruppeneigenschaft verletzt ist. Welche der Gruppen sind abelsch? Geben Sie bei den Gruppen das neutrale Element n und jeweils zu jedem $g \in G_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, das inverse Element an.

(a) $G_1 := (\mathbb{Z}_m, +)$, wobei $+$ die Addition in $\mathbb{Z}_m$ aus der Vorlesung bezeichnet.

(b) $G_2 := (\mathbb{R}^2, \odot)$ mit $(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) := (x_1 y_1, x_2 y_2)$.

(c) $G_3 := (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation von rationalen Zahlen bezeichnet.

(d) $G_4 := (\{0, 1\}, \oplus)$ mit $0 \oplus 0 := 0$, $0 \oplus 1 := 1$, $1 \oplus 0 := 1$ und $1 \oplus 1 := 0$.

(e) $G_5 := (\mathscr{P}(\{0, 1\}), \cup)$, wobei $A \cup B$ wie gewohnt die Vereinigung der beiden Mengen A und B bezeichnet.

Aufgabe H16 (Direktes Produkt) (5 Punkte)
Seien $(G, *, e)$ und $(G', *', e')$ zwei Gruppen. Sei $\cdot : (G \times G') \times (G \times G') \to G \times G'$ die Verknüpfung mit $(x, x') \cdot (y, y') = (x * y, x' *' y')$.

(a) Zeigen Sie, dass $(G \times G', \cdot)$ eine Gruppe ist. Was ist das neutral Element?

(b) Zeigen Sie, dass $\Pi_1 : G \times G' \to G$, mit $\Pi_1(g, g') = g$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\Sigma_1 : G \to G \times G'$, mit $\Sigma_1(g) = (g, e')$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

(d) Jetzt wird angenommen, dass $G = G'$ abelsch ist, zeigen Sie, dass $\Phi : G \times G \to G$, mit $\Phi(g, g') = g * g'$, ein Gruppenhomomorphismus ist.