Lineare Algebra 1
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

10.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G16
Berechnen Sie das Inverse zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G17
Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$, auch A^T invertierbat ist und bestimme $(A^T)^{-1}$.

Aufgabe G18
Sei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ ein beliebige 2×2 Matrix.

Zeigen Sie, dass dann

$$X^2 - \mathrm{Sp}(x) \cdot X + \det(X) \cdot E_2 = 0$$

gilt. Dabei ist

- $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$
- $\det(X) = ad - bc \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{Sp}(X) = a + d \in \mathbb{R}$.

Hausübung

Aufgabe H12 (Ein geometrisches Beispiel für ein lineares Gleichungssystem) (5 Punkte)
In dieser Aufgabe soll der Mittelpunkt und der Radius eines Kreises bestimmt werden, auf dem die Punkte $(-1,3), (0,4)$ und $(4,-2)$ liegen.

Allgemein ist ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch eine Gleichung der Form

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = c \tag{1}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $c > 0$.

(a) Welche geometrischen Größen des Kreises werden durch die Konstanten a, b und c beschrieben?

(b) Um die Konstanten a, b und c mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmen zu können, muss man zunächst eine Umformung durchführen. Ausmultiplizieren der Gleichung (1) und Subtrahieren von $a^2 + b^2$ ergibt die Gleichung $x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = c - a^2 - b^2$. Setzt man nun noch $\widetilde{c} = c - a^2 - b^2$, so erhält man die Gleichung

$$x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = \widetilde{c}\,. \tag{2}$$

Welche Bedingungen müssen nun für die Konstanten a, b und $\widetilde{c}$ gelten, damit die Gleichung (2) einen Kreis beschreibt?

(c) Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises durch die Punkte $(-1,3),(0,4)$ und $(4,-2)$ indem Sie die Werte in die Gleichung (2) einsetzen und das zugehörige Gleichungssystem lösen.

Aufgabe H13 (Spur) (5 Punkte)

Sei $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_n(\mathbb{R})$ eine $n\times n$ Matrix.

$$\mathrm{Sp}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

bezeichnet die so genannte *Spur* der Matrix A.

(a) Zeige, dass gilt: für alle $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ gilt: $\mathrm{Sp}(AB)=\mathrm{Sp}(BA)$

(b) Zeige, dass gilt: ist $X\in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar, dann gilt: $\mathrm{Sp}(XAX^{-1})=\mathrm{Sp}(A)$