

Lineare Algebra 1

4. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

M. Schneider

Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

04.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G14

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a)

$$\begin{array}{rcccc} 2x & +y & -z & +t & = 0 \\ x & +3y & & -t & = 1 \\ & y & & +t & = -2 \\ & -2y & & -2t & = 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rccc} x & +y & +z & = 0 \\ x & -y & +z & = 0 \\ -x & -y & -z & = 0 \end{array}$$

Aufgabe G15 (Inverse und Transponierte einer Matrix)

Beweisen Sie:

- $(A + A')B = AB + A'B$
- $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

Aufgabe G16 (Vektoren- und Matrizenmultiplikation)

Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Wann ist $\alpha \cdot \beta$ definiert, wobei $\alpha, \beta \in \{x, y, z, A, B, C\}$? Berechnen Sie gegebenenfalls die resultierende Matrix.
- (b) Wenn $\alpha \cdot \beta$ nicht definiert ist, bestimmen Sie ob $\alpha^t \cdot \beta$ definiert ist, wobei β kein Vektor ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die resultierende Matrix.
- (c) Berechnen Sie $\alpha \cdot \alpha^t$ und $\alpha^t \cdot \alpha$ wobei $\alpha \in \{x, y, z\}$.

Hausübung

Aufgabe H9 (Parameter in LGS)

(5 Punkte)

Verwendend Gauss - Jordan - Algorithmus bestimmen Sie den Wert von k so dass das System

$$E[k] \begin{cases} x & & - 3z & = & -3 \\ 2x & + & ky & - & z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \end{cases}$$

- (a) eindeutige Lösung besitzt

-
- (b) keine Lösung besitzt
 - (c) mehr als eine Lösung besitzt

Aufgabe H10 (Invertierbare Matrizen)

(7 Punkte)

Entscheiden Sie welche der folgenden quadratischen Matrizen invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie Rang folgender Matrizen:

- (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe H11

(6 Punkte)

Entscheiden Sie jeweils ob die folgenden Teilmengen M von $M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, abgeschlossen (d.h. $A \in M, B \in M \Rightarrow A+B \in M$ bzw. $A \cdot B \in M$) unter Matrizenaddition bzw. Multiplikation sind.

- (a) Die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen.
- (b) Die Menge aller Diagonalmatrizen.
- (c) Die Menge aller Matrizen, bei denen die erste Zeile nur Nullen enthält.
- (d) Die Menge aller Matrizen mit ausschließlich negativen Einträgen.
- (e) Die Menge aller Matrizen mit rationalen Einträgen.
- (f) Die Menge aller Matrizen, bei denen die Summe aller Einträge Null ergibt.