Lineare Algebra 1
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
M. Schneider **19.04.2012**
Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

Gruppenübung

Aufgabe G6 (Einfache Potenzmengen)
Schreiben alle Elemente der Potenzmenge von

(a) $X := \emptyset$,

(b) $X := \{1\}$,

(c) $X := \{1, 2\}$,

(d) $X := \{1, 2, 3\}$,

(e) der Potenzmenge von $X := \{3, 4\}$.

Wieviel Elemente hat die Potenzmenge einer n-elementigen Menge für $n = 0, 1, 2, 3$? Ist die Potenzmenge von X größer als X, kleiner oder gleich groß?

Aufgabe G7 (Injektiv, surjektiv in $\mathbb{R}$)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entscheiden Sie in den folgenden Fällen, ob f injektiv oder surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = -3x + 5$

(c) $f(x) = x^2$

Aufgabe G8 (Injektiv, surjektiv in $\mathbb{R}^2$)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. In diesen folgenden Fällen entscheiden Sie, ob f injektiv, surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f(x, y) = (x, y)$

(b) $f(x, y) = (x + 1, -y)$

Aufgabe G9 (Eigenschaften von Relationen)
Sei M eine Menge. Eine Relation R über $M \times M$ kann folgende Eigenschaften haben:

(a) *reflexiv:* $\forall x \in M : xRx$

(b) *symmetrisch:* $\forall x \in M : \forall y \in M : xRy \Rightarrow yRx$

(c) *transitiv:* $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$

(d) *antisymmetrisch:* $\forall x \in M : \forall y \in M : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

(e) *total:* $\forall x \in M : \forall y \in M : xRy \vee yRx$

Entscheiden Sie für die folgenden Relationen, welche der obigen Eigenschaften zutreffen.

(a) Sei M die Menge der Einwohner Darmstadts und R die Relation „x wohnt im selben Stadtteil wie y“.

(b) Sei $M = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und sei R die Relation „x ist kleiner oder gleich y“.

(c) Sei $M = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null und sei R die Relation „x ist Teiler von y“.

(d) Sei $M = \mathscr{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ die Menge aller Teilmengen von $\{1, 2\}$ und sei R die Relation „x ist Teilmenge von y“.

Eine Relation auf $M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist; sie heißt *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Ein Halbordnung, die total ist, heißt *lineare Ordnung*. Entscheiden Sie, welche der drei genannten Begriffe auf die obigen Beispiele von Relationen zutreffen.

Aufgabe G10 (Abbildung, Teilmenge und Schnittmenge)
Seien M und N zwei Mengen und f eine Abbildung von M nach N. Seien A und B zwei Teilmenge von M

(a) Wenn $A \subseteq B$, wie kann man $f(A)$ und $f(B)$ vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Für beliebige A und B, wie kann man $f(A \cap B)$ und $f(A) \cap f(B)$ vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausübung

Aufgabe H4 (Eigenschaften der Injektivität und der Surjektivität) (5 Punkte)
Seien A, B und C drei Mengen. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktion.

(a) Angenommen, dass $g \circ f$ bijektiv ist, zeigen Sie, dass f injektiv ist und g surjektiv ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel, damit $g \circ f$ nicht bijektiv ist, obwohl f injektiv ist und g surjektiv ist.

(c) Finden Sie ein Beispiel, damit $g \circ f$ bijektiv ist, obwohl f nicht surjektiv ist und g nicht injektiv ist.

Aufgabe H5 (Abbildungen) (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Bildmenge folgender Abbildungen (Funktionen) von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Skizzieren Sie diese in einem rechtwinkligen Koordinatensystem und geben Sie an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

i. $f_1(x) = 10$
ii. $f_2(x) = x^2 + 2$
iii. $f_3 : x \mapsto x^3$
iv. $f_4(x) = \sqrt{x}$
v. $f_5 : x \mapsto |x| - x$
vi. $f_6(x) = (\mathrm{sgn}(x))^2$

(b) Geben Sie das Urbild der Zahl 4 bezüglich f_2, f_4 und f_5 an.

(c) Welche Funktionen besitzen eine Umkehrabbildung (Umkehrfunktion)?

(d) Berechnen Sie die Kompositionen (Verknüpfungen) $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_3$, $f_6 \circ f_5$ und berechnen Sie $(f_2 \circ f_3)(5)$ und $(f_3 \circ f_2)(5)$.

Aufgabe H6 (Abbildungen) (5 Punkte)
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$, so ist $m = n$.